Maths 06

Université A.MIRA — Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

♣— Examen Final d'Analyse Numérique —♣

Exercice 1 (12.00 points) : Soit l'équation suivante :

$$F(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \qquad (1)$$

I– 1. Tracer le graphe de F dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ et déduire le nombre de racines.

2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α sur l'intervalle $I = [\frac{2\pi}{3}, \pi]$.
3. Déterminer le nombre minimal d'iterations nécessaires pour approcher, par la méthode de dichotomie, avec une précision $\epsilon = 10^{-10}$, la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I.
4. Calculer les trois premiers itérés (x_0, x_1 et x_2).

II– 1. Pour $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, écrire la suite de Newton.

2. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
3. Calculer les quatre premières itérations, avec quatre chiffres significatifs.

III– 1. On considère maintenant la méthode de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$, avec

$$g(x_n) = \sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad (2)$$

2. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $x = g(x)$.
3. Montrer que la méthode donnée en (2) est convergente dans l'intervalle $I_1 = [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.
4. Pour $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, déterminer le nombre d'iterations nécessaires pour approcher la racine de l'équation (1) située sur l'intervalle I_1, avec une précision $\epsilon = 10^{-10}$.
5. Calculer les quatre premières itérations, avec quatre chiffres significatifs. Conclure.

Barème détaillé de l'exercice 1 :
I – 01.25 + 01.00 + 01.00 + 00.75, **II** – 00.50 + 01.00 + 02.00, **III** – 00.50 + 01.50 + 01.00 + 01.50

Exercice 2 (08.00 points) : On considère la matrice A et le vecteur b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelle valeur de α la matrice A est symétrique définie positive ?
2. Pour une valeur $\alpha = \frac{1}{2}$, donner la décomposition Cholesky.
3. Résoudre le système $AX = b$ en utilisant cette décomposition.
4. Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant cette décomposition.
5. Déduire la solution X du système $AX = b$.

Barème détaillé de l'exercice 2 : 01.50 + 01.50 + 01.00 + 03.50 + 00.50

La rédaction claire et rigoureuse est exigée !

Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de L'Examen 24/05/13

D'Analyse Numérique

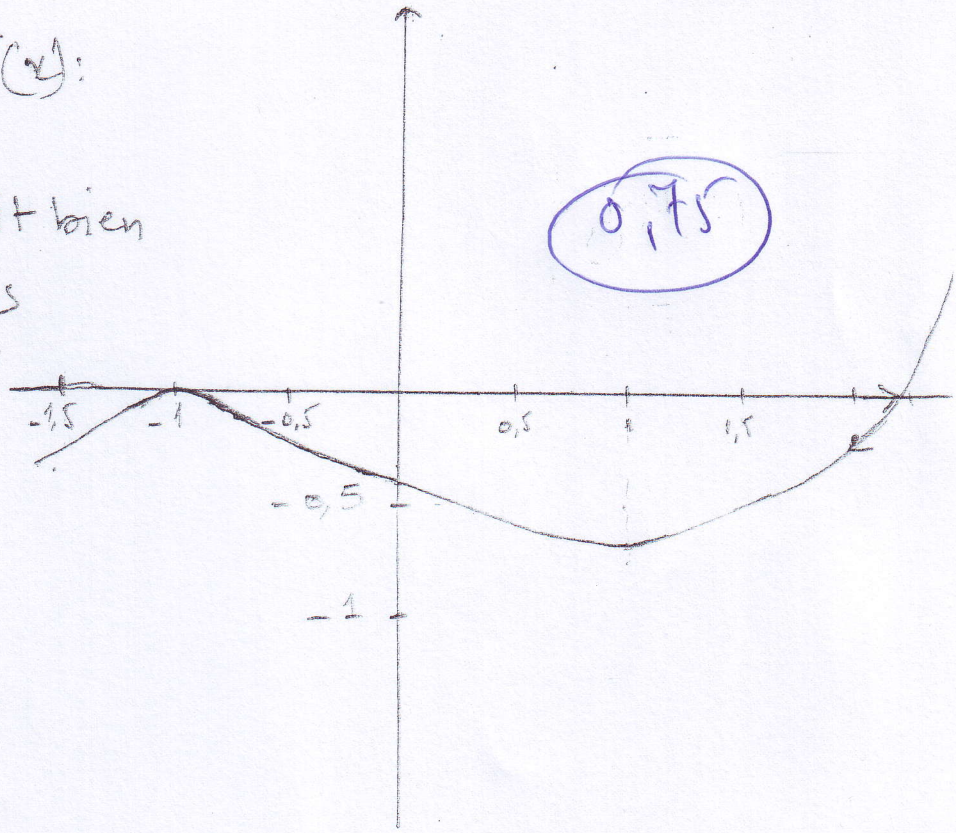
Exercice N° 1 :

I

$$F(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

1/ le graphe de F(x) :

0,75



D'après le graphe on voit bien que y a deux racines

$\alpha_1 \in [-\pi/2, 0]$ 0,25

$\alpha_2 \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ 0,25

2°/ il suffit de vérifier les conditions du T.V.I.

a°] La fonction F est définie et continue sur I (voir 1°)

b°) $\left.\begin{array}{l} F(2\pi/3) = -0,1613 \\ F(\pi) = 1,2284 \end{array}\right\}$ alors : 1

* il $\exists$ au moins une racine α dans $]\frac{2\pi}{3}, \pi[$

c°/ $F'(x) = \frac{1}{2} - \cos x > 0, \ \forall x \in I \Rightarrow F \nearrow$

Par conséquent, la racine α est unique sur I.

3°/ Le nombre d'itérations de Dichotomie :

D'après la formule de Cours 1

$$n > \frac{\ln\left|\frac{b-a}{\varepsilon}\right|}{\ln 2} - 1 = 32,2858 \Rightarrow n = 33$$

4°/ Calcul des itérations :

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3}+\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} = 2,6180$$

0,75

$x_1 = 2,3562$

$x_2 = 2,2253$

II — o — o — Newton — o — o —

1°/ la Suite de Newton, pour $x_0 = \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{cases} x_0 = 5\pi/6 \text{ (choisi)} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{(cours)}$$

Pour notre Cas :

0,5

$$\begin{cases} x_0 = 5\pi/6 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{\frac{x_n}{2} - \sin x_n + \pi/6 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1/2 - \cos x_n} \end{cases}$$

2°/ les Conditions d'applications de Newton :

a) Il est bien clair que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2(I)$ (voir I-1).

b) $F(2\pi/3)F(\pi)<0$ (voir I-2°))

1

c) $F'(x) = 1/2 - \cos x > 0, \forall x \in I$.

d) $F''(x) = \sin x > 0, \forall x \in I$.

e) $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ donné dans l'exercice $(F(5\pi/6)F''(\frac{5\pi}{6})>0)$

$$\begin{cases} F(5\pi/6) = 0{,}4666 \\ F''(5\pi/6) = 0{,}5 \end{cases}$$

Alors la suite de Newton (voir II-1) converge vers la racine unique α sur I, pour $x_0 = \frac{5\pi}{6}$.

3°) les itérations de la méthode de Newton

Pour $n=0$, dans II-1°) :

$$x_1 = 2{,}2764$$

Pour $n=1$, dans II-1°) :

2

$$x_2 = 2{,}2463$$

Pour $n=2$:

$$x_3 = 2{,}2460$$

Pour $n=3$:

$$x_4 = 2{,}2460$$

~~Conclusion : La racine α à 10^{-4} est donnée par $x_3 = 2{,}2460$.~~

III ~o— Point Fixe ~o—

$$x = g(x) = \sin x + \frac{x}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2°/ $F(x) = 0 \iff \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$$\iff \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

0,5

$$\iff x - \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\iff x = \frac{x}{2} + \sin x - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = g(x)$$

3°/ la Convergence de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$

a°- stabilité : $g(I_1) \subset I_1 = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

$g'(x) = \frac{1}{2} + \cos x < 0, \ \forall x \in I_1 \Rightarrow g \downarrow$

$$g(I_1) = \left[g\left(\frac{5\pi}{6}\right), g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = [2{,}1516 ; 2{,}2556] \subset$$

0,75

$$\subset \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] = [2{,}0944 ; 2{,}6180].$$

D'où g est stable.

b°] Contractance : $\exists k / 0 < k < 1$, avec

0,75

$$k = \max_{x \in I_1}\{|g'(x)|\} = \max_{x \in I_1}\left\{\frac{1}{2} + \cos x\right\}.$$

$$= \max\{|0| ; |-0{,}3657|\} = 0{,}3657 < 1$$

Alors la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ Converge vers α de $F(x) = 0$.

4°/ Nombre d'itérations de Point Fixe:

D'après le cours, on a

$$n > \frac{\ln\left[\frac{(1-k)\,\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right]}{\ln(k)} \quad ; \quad \text{avec}$$

1

$k = 0,3657$, $x_0 = \frac{5\pi}{6} = 2,6180$

$\varepsilon = 10^{-10}$, $x_1 = g(x_0) = 2,1514$

AN:

$$n > 22,5846 \Rightarrow n = 23$$

5°/ les itérations de Point Fixe

$$x_1 = g(x_0) = g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2,1514$$

$$x_2 = g(x_1) = 2,2543$$

$$x_3 = g(x_2) = 2,2449$$

$$x_4 = g(x_4) = 2,2461$$

Conclusion: La racine α à 10^{-2} est donnée par x_3

0,5

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

1- A est SDP :

- A est symétrique ssi $A^t = A$.

0,25

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \dots (1)$$

- A est définie positive ssi $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,3}$

0,25

- $\Delta_1 = 1 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$

0,25

$\Delta_2 = \alpha(1-\alpha) > 0$ pour $\alpha \in]0, 1[\quad \dots (2)$

- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^5$$

$$= \alpha^3(1 - \alpha - \alpha^2).$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

0,25

$\Delta_3 = \alpha^3(1-\alpha-\alpha^2) > 0$ pour $\alpha \in]-\infty, \alpha_3[\cup]0, \alpha_2[\quad \dots (3)$

Par conséquent : A est SDP si $\alpha \in \left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$

P-6 0,5

2) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donner la décomposition de Cholesky :

A est SDP pour $\alpha \in \left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ et

0,5 $\frac{1}{2} \in \left]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ donc on peut la décomposition de Cholesky.

Soit

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

$$L L^t = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11} L_{21} & L_{11} L_{31} \\ L_{11} L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21} L_{31} + L_{22} L_{32} \\ L_{11} L_{31} & L_{31} L_{21} + L_{32} L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Par identification avec A, on obtient :

1 $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3) Résolution du système $Ax = b$ en utilisant cette décomposition :

$$Ax = b \iff L \underbrace{L^t x}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \quad \dots (1) \\ L^t x = y \quad \dots (2) \end{cases}$$

P. T

De (1) : $y = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t$. 0,5

De (2) : $x = (0, 1, 2)^t$ est la solution du système $Ax = b$. 0,5

4) L'inverse de A par LL^t :

Pour $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \det A = \frac{1}{32} \neq 0$ 0,5

donc A^{-1} existe

On pose $A^{-1} = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}} \end{array}$

On a $AA^{-1} = I_3 \Leftrightarrow A(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Av_1 = e_1 \\ Av_2 = e_2 \\ Av_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L\underbrace{L^t v_1}_{y_1} = e_1 \\ L\underbrace{L^t v_2}_{y_2} = e_2 \\ L\underbrace{L^t v_3}_{y_3} = e_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} Ly_1 = e_1 \\ L^t v_1 = y_1 \end{cases} \quad \ldots (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} Ly_2 = e_2 \\ L^t v_2 = y_2 \end{cases} \quad \ldots (\mathrm{II}) \\ \begin{cases} Ly_3 = e_3 \\ L^t v_3 = y_3 \end{cases} \quad \ldots (\mathrm{III}) \end{cases}$$

De (I) :

- $L y_1 = e_1 \iff y_1 = (1, -1, -\sqrt{2})^t$
- $L^t v_1 = y_1 \iff v_1 = (4, -4, -4)^t$ 1

De (II) :

- $L y_2 = e_2 \iff y_2 = (0, 2, \sqrt{2})^t$
- $L^t v_2 = y_2 \iff v_2 = (-4, 6, 4)^t$ 1

De (III) :

- $L y_3 = e_3 \iff y_3 = (0, 0, 2\sqrt{2})^t$
- $L^t v_3 = y_3 \iff v_3 = (-4, 4, 8)^t$ 1

De (I), (II), (III), on aura :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

5) Déduire la solution X du système $AX = b$:

$$AX = b \iff A^{-1} A X = A^{-1} b$$
$$\iff X = A^{-1} b.$$
$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

0.5

$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est la solution du système $AX = b$.

P-9