Université A. Mira - Bejaia.
Faculté de Technologie.
Département $2^{ème}$ Année ST.

Année: 2012/2013.
Module: Physique 3.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE REMPLACEMENT

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T=4s.}$ (1) 2. La fonction est impaire. (0,5)
2. $a_0 =$ (0,5) $a_n = 0$ (0,5) (Car la fonction est impaire.)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \ (0{,}5) = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \quad \{f \text{ impaire} \rightarrow \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \text{ est correcte aussi}\}$$
$$= \frac{2}{4}\left[\int_{-1}^{0} -1.\sin\frac{2\pi nt}{4}dt + 0 + \int_0^1 1.\sin\frac{2\pi nt}{4}dt \ + 0\right] \ (0{,}5)$$
$$= \frac{2}{\pi n}(1-\cos\frac{\pi n}{2}).\ (0{,}5)$$

Donc, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-\cos\frac{\pi n}{2})\sin\frac{\pi nt}{2}$. {Pour n impaire $\cos\frac{\pi n}{2}=0$, pour n paire $\cos\frac{\pi 2k}{2}=\cos\pi k = (-1)^k$}

Exercice 2

1. Puisque les deux disques roulent sans glissement on a $\boxed{x = r\varphi = R\theta.}$ (0,5) (Donc, $\dot{x} = r\dot{\varphi} = R\dot{\theta}$.)

$$T = T_{M(translation)} + T_{M(rotation)} + T_{m(translation)} + T_{m(rotation)}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}M\dot{x}^2}\ (0{,}5) + \boxed{\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2}\ (0{,}5) + \boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}\ (0{,}5) + \boxed{\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2}\ (0{,}5) = \frac{3}{4}(M+m)\dot{x}^2.$$
$$U = U_m = \boxed{\frac{1}{2}kx^2.}\ (0{,}5)$$

2. Avec l'équation de Lagrange. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}(M+m)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0}\ (0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3(M+m)}x = 0.}\ (1)\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3(M+m)}}}\ (0{,}5)$$

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale. $E = T + U = \frac{3}{4}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}\ (0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3(M+m)}x = 0.}\ (1)\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3(M+m)}}}\ (0{,}5)$$

Exercice 3

1. $T = T_{2m} + T_m = \boxed{\frac{1}{2}2m(L\dot{\theta})^2}\ (0{,}5) + \boxed{\frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2}\ (0{,}5) = 3mL^2\dot{\theta}^2.$ (1)

$$U = U_k + U_m + U_{2m} \approx \boxed{\frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2}\ (0{,}5) + \boxed{mg2L\sin\theta - 2mgL\sin\theta}\ (0{,}5) \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2.\ (1)$$
$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2.}\ (0{,}5)$$

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = 3mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kL^2\theta^2$.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{6mL^2\ddot{\theta} + kL^2\theta = -\alpha L^2\dot{\theta}}\ (0{,}5) \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{6m}\dot{\theta} + \frac{k}{6m}\theta = 0.$$

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{12m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{6m}.}$ (0,5) (1)

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ (0,5) $= \boxed{0.}$ (0,5) Le mouvement est donc en régime $\boxed{\text{critique.}}$ (0,5) (1,5)

4. La présence d'oscillations indique que le mouvement est devenu pseudo-périodique, d'amplitude $Ae^{-\lambda t}$;

$$\boxed{Ae^{-\lambda(t+2T)} = \frac{1}{3}Ae^{-\lambda t}.}\ (0{,}5) \Longrightarrow \boxed{2\lambda T = \ln 3}\ (0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \ln 3}\ (0{,}5)$$
$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\omega_0 \ln 3}{\sqrt{(4\pi)^2 + (\ln 3)^2}}}\ (0{,}5)\ \text{A.N: } \boxed{\lambda \approx 0{,}09\ s^{-1}.}\ (0{,}5) \Longrightarrow \alpha = 12m\lambda \approx \boxed{1{,}08\ \text{N.s/m.}}\ (0{,}5)$$

(2) (1)

Questions de cours

1. L'amortissement est *faible*. (1)
2. $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$. (1)
3. La puissance moyenne est *maximale*. (1)