Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département de Sciences Techniques
2ème année ST-S4

Maths 06

Série N°01 d'Analyse Numérique
Résolutions des équations non linéaires $F(x) = 0$

Exercice 1 : Soit à résoudre l'équation (E) suivante :

$$F(x) = x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0.$$

1. Séparer graphiquement les racines de (E).
2. Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour approcher, par la méthode de Bisection (Dichotomie), avec une précision $\epsilon = 10^{-4}$, la racine de l'équation (E) située sur l'intervalle $[a, b] = [0.6, 2]$.
3. Calculer les cinq premiers itérés.

Exercice 2 : On considère l'équation suivante :

$$F(x) = \frac{3 - x^2}{3} e^{\frac{1}{2} - x} - 1 = 0, \qquad x \in [-1, 1].$$

1. Montrer que l'équation $F(x) = 0$
   est équivalente à $x = g(x) = \ln(3 - x^2) + \frac{1}{2} - \ln 3$.
2. Pour $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$, montrer que l'algorithme $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers le zéro α de $F(x)$.
3. Montrer que l'on a $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{11}\right)^n$.

Exercice 3 : On se propose de trouver une valeur approchée de la racine de l'équation

$$F(x) = -e^{-2x} + x. \tag{1}$$

1. Situer graphiquement la racine α de l'équation (1) dans un intervalle I de longueur unité.
2. Montrer que cette racine est unique dans l'intervalle I
3. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton pour approcher la racine α dans I ?

Corrigé de la Série N° 1
– Analyse Numérique –

EXO1 :

$$f(x) = x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0 \quad \text{----} (E)$$

1 - Séparation des racines de E :

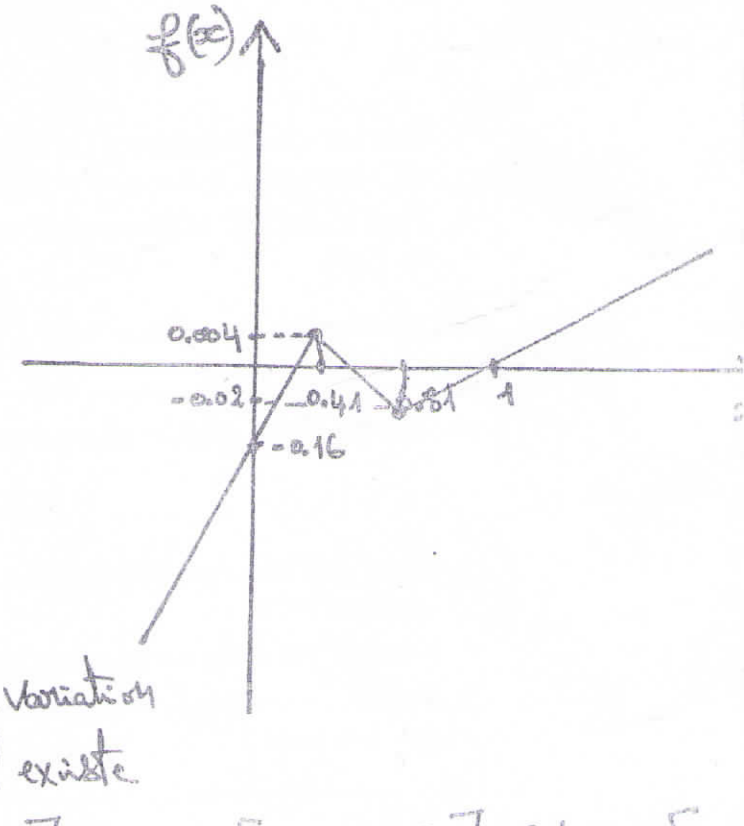
*** Etudiant les variations de f**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

- $f'(x) = 3x^2 - \frac{11}{3}x + 1$.

$f'(x) = 0 \iff x_1 = 0.41$, et $x_2 = 0.81$.

x	$-\infty$		0.41		0.81		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0.004	$\searrow$	-0.02	$\nearrow$	$+\infty$



*** Remarques :**

– Du graphe ou bien du tableau de variation de f, on peut voir clairement qu'il existe 3 racines : $\bar{x}_1 \in]-\infty, 0.41[$, $\bar{x}_2 \in]0.41, 0.81[$, $\bar{x}_3 \in]0.81, +\infty[$.

2]- Le nombre minimal d'itérations de la méthode de Dichotomie :

on a : $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon \Rightarrow b-a \leqslant \varepsilon . 2^{n+1}$ ----- (*)

$(*) \Rightarrow \ln(b-a) \leqslant \ln(\varepsilon . 2^{n+1})$

$\Rightarrow \ln(b-a) \leqslant \ln \varepsilon + \ln 2^{n+1} \Rightarrow \ln(b-a) - \ln \varepsilon \leqslant \ln 2^{n+1}$

$\Rightarrow \ln(b-a) - \ln \varepsilon \leqslant (n+1)\ln 2 \Rightarrow \ln(b-a) - \ln \varepsilon \leqslant n \ln 2 + \ln 2$

$\Rightarrow \ln(b-a) - \ln \varepsilon - \ln 2 \leqslant n \ln 2$

$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$ ——— $(*)'$

$[a,b] = [0.6, 2]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

$(*)' \Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(2-0.6) + 4\ln 10}{\ln 2} - 1 \Rightarrow n \geqslant 12.77$.

$\Rightarrow n = [12.77] + 1 = 13$.

3]. Les Cinq premiers itérés : La fonction f étant continue et monotone sur $]0.6, 2[$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	0.6	2	1.3	0.2443
2	0.6	1.3	0.95	-0.0454
3	0.95	1.3	1.125	0.0728
4	0.95	1.125	1.0375	0.0244
5	0.95	1.0375	0.9937	0.0079

$f(0.6) = -0.0028$.

$f(2) = 2.52$.

$f(0.6) . f(2) < 0$

0

Ex 02 :

$$F(x) = \frac{3-x^2}{3} e^{\frac{1}{2}-x} - 1 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

1°] $F(x) = 0 \iff \dfrac{3-x^2}{3} e^{\frac{1}{2}-x} - 1 = 0$

$$\iff \frac{3-x^2}{3} e^{\frac{1}{2}-x} = 1 \iff e^{\frac{1}{2}-x} = \frac{3}{3-x^2}$$

$$\iff \frac{1}{2} - x = \ln 3 - \ln(3-x^2)$$

$$\iff x = \ln(3-x^2) - \ln 3 + \frac{1}{2} = g(x).$$

2°] $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$, g est bien définie et dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$.

i/

$$g'(x) = \frac{-2x}{3-x^2} \Rightarrow g \searrow$$

$$g''(x) = \frac{-2x^2-6}{(3-x^2)^2} < 0$$

x	0	$1/2$
g''	$-$	
g'	$0 \searrow$	$-\frac{4}{11}$
$\lvert g'(x)\rvert$	$0 \nearrow$	$\frac{4}{11}$

Alors pour montrer que g est <u>Contractante</u>, il suffit de prendre $K = \max_{x \in I} |g'(x)| = \frac{4}{11} < 1$, Donc g est Contractante ds $[0, \frac{1}{2}]$

ii/ Stabilité de g sur $I = [0, \frac{1}{2}]$

<u>On a</u> : $g(0) = \frac{1}{2}$; $g(\frac{1}{2}) = 0.41$.

Comme g est $\downarrow$, alors :

$$g([0, \tfrac{1}{2}]) = [g(\tfrac{1}{2}), g(0)] = [0.41, \tfrac{1}{2}] \subset I$$

Donc $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par g.

$\left(\text{i.e}, \forall x \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow g(x) \in [0, \frac{1}{2}] \right)$

<u>Conclusion</u> : Comme les conditions de point fixe sont vérifiés, alors la suite de p.F

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{1}{2}] \\ x_{n+1} = g(x_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ Converge vers la racine α de $F(x) = 0$.

3] $|x_n - \alpha| \leq \left[\frac{4}{11}\right]^n$?

D'après le cours : $|x_n - \alpha| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$, avec $K = \frac{4}{11}$

Pour que : $|x_n - \alpha| < \left[\frac{4}{11}\right]^n$, il suffit que

$$\frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| < K^n = \left[\frac{11}{4}\right]^n \Leftrightarrow \frac{|x_1 - x_0|}{1-K} < 1$$

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_0| < 1 - K = \frac{7}{11}$$

Or $\forall x_0 \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow x_1 \in [0.41, \frac{1}{2}]$, $\boxed{\text{donc } |x_1 - x_0| \leq 0.5 < \frac{7}{11}}$

<u>Donc</u> : $\frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| < K^n \Longrightarrow |x_n - \alpha| < K^n = \left[\frac{4}{11}\right]^n$.

Exercice N°3:

$$F(x) = x - 1 + \sin(2x)$$

1) Le graphe de F:

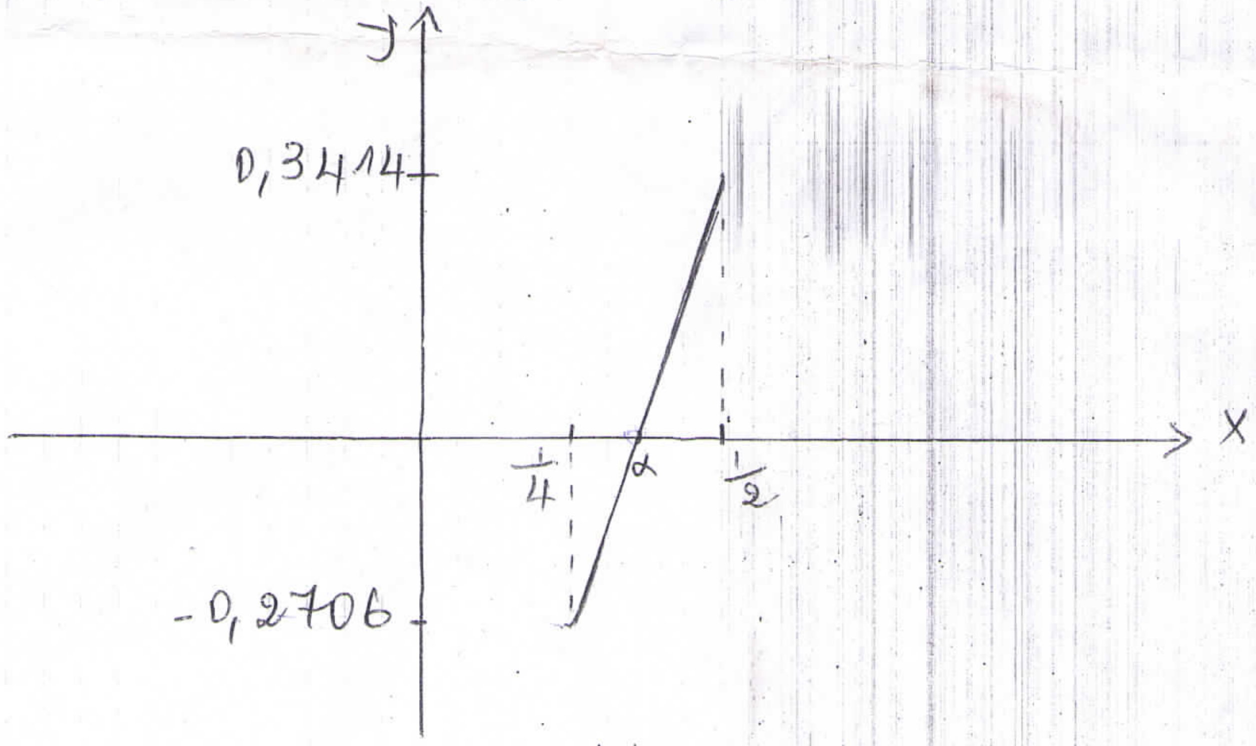
On a: $F\left(\frac{1}{4}\right) = -0{,}2706$

$F\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}3414$

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$F'(x)$		+	
$F(x)$	$-0{,}2706$	$\nearrow$	$0{,}3414$

$F'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0, \quad \forall x \in I = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Car $0 < \frac{1}{2} \leqslant 2x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, donc F est strictement croissante sur I.



2°) α est une racine unique sur I:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ est définie et continue sur } I \\ \bullet\ F\left(\frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ (voir Q}_1\text{)} \end{array}\right\}$ • Il existe au moins une racine $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$

• De plus $F'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0, \ \forall x \in I$ (voir Q_1)

alors F est strictement croissante 20 JAN 2014

D'où la racine α est unique sur I.

3°) la suite de Newton :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{4}, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 1 + \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)} = \frac{1 + 2x_n\cos(2x_n) - \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)} \end{cases}$$

4°) Les conditions d'application sur I.

- $F \in C^2(I)$, car F est composée de polynôme et d'une fonction trigonométrique les deux de C^2
- $F(\frac{1}{4})F(\frac{1}{2}) < 0$ (voir Q_1)
- $F'(x) = 1 + 2\cos(2x) \neq 0$
- $F''(x) = -4\sin(2x) \neq 0$

car : $0 < \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$

- $x_0 = \frac{1}{4}$ donné par hypothèse et $\left(F(\frac{1}{4})F''(\frac{1}{4}) > 0\right)$

Alors la suite de Newton (voir Q_3) converge vers la racine unique α sur I.

5°/ $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{4} \\ x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n \cos(2x_n) - \sin 2(x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour : $n = 0$

$$x_1 = 0,3483$$

Pour : $n = 1$

$$x_2 = 0,3522$$

Pour : $n = 2$

$$x_3 = 0,3524$$

Pour : $n = 3$

$$x_4 = 0,3524$$

Conclusion : $\alpha = x_3 = 0,3524$ à 10^{-4} (4 chiffr

6°/ L'inégalité $|x_3 - \alpha| \leq 1,6 \times 10^{-4}$?

D'après le cours, on a

- $|x_3 - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_3 - x_2|^2$

- $M = \underset{x \in I}{\text{Max}} \{ |F''(x)| \} = \underset{x \in I}{\max} \{ 4 \sin(2x) \}$ > 0

$$= 4 \sin 1$$

$$M = 4 \sin 1 = 3,3659$$

- $m = \underset{x \in I}{\text{Min}} \{ |F'(x)| \} = \underset{x \in I}{\text{Min}} \{ 1 + 2\cos(2x) \}$

$$= 1 + 2\cos(1) = 2,0806$$

Remarque :

$x \longmapsto 4\sin(2x)$ est strictement croissante sur I

$x \longmapsto 1 + 2\cos(2x)$ est strictement décroissante sur I

Le résultat final :

$$|x_3 - \alpha| \leqslant \underbrace{\frac{3{,}3659}{2(2{,}0806)} |0{,}3524 - 0{,}3522|}_{= 1{,}6 \times 10^{-4}}$$

Université de A.MIRA–Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie–2ème année
®– 2013–2014

Série N°02 : Systèmes d'Équations Linéaires

Exercice 1 :On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_3 + x_2 = 4. \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Déterminer la matrice $\widetilde{A}$ et déduire son déterminant, en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
3. Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant cette méthode.
4. Déduire le déterminant de la matrice A^{-1}.
5. Déduire la solution X du système $AX = b$.
6. Résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

Exercice 2 : On donne la matrice A et le vecteur b, par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 3, 6)^t.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive (SDP).
2. Donner la décomposition LU de la matrice A.
3. En utilisant la décomposition LU, résoudre le système "$AX = b$".
4. Déterminer A^{-1} en utilisant cette décomposition.
5. Déduire la solution X du système $AX = b$.

Exercice 3 : Le système linéaire $AX = b$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 9/4\, x_1 - 1/4\, x_3 = 2, \\ 3/2\, x_2 = 3, \\ -1/4\, x_1 + 9/4\, x_3 = 2. \end{cases} \qquad (1)$$

1. Peut-on appliquer la décomposition de *Cholesky* ?
2. Si oui, donner la décomposition de *Cholesky* du système (1).
3. Déterminer A^{-1} en utilisant cette décomposition.
4. Déduire le déterminant de la matrice A.
5. Déduire la solution X du système $AX = b$.

Mr Boualem

Corrigé de la série N° 02

Exo 1 :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_3 + x_2 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A\,X = b$$

1) Montrer que la matrice A est inversible :

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ A est inversible (régulière).

2) Déterminer la matrice $\tilde{A}$ en utilisant la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$1^{ère}$ étape : $a_{11}^{(0)} = 2 \neq 0$

$$\begin{array}{c} L_1^{(1)} = \frac{L_1^{(0)}}{2} \\ L_2^{(1)} = L_1^{(1)} - L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} = L_1^{(1)} - L_3^{(0)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right)$$

2^{eme} étape : $a_{22}^{(1)} = -\frac{3}{2} \neq 0$

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$
$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} / -\tfrac{3}{2}$$
$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + \tfrac{1}{2} L_2^{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

3^{eme} étape : $a_{33}^{(2)} = -\frac{4}{3} \neq 0$

$$L_1^{(3)} = L_1^{(2)}$$
$$L_2^{(3)} = L_2^{(2)}$$
$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} / -\tfrac{4}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\tilde{A}} \qquad \underbrace{}_{\tilde{b}}$$

1) Déduire le déterminant de $\tilde{A}$:

$$\det(\tilde{A}) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = a_{11}^{(0)} \, a_{22}^{(1)} \, a_{33}^{(2)}$$

$$= 2 \times \left(\frac{-3}{2}\right) \times \left(\frac{-4}{3}\right) = 4 = \det(A)$$

3) Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant cette méthode :

$\det A = 4 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe. / $A^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}$

On a $AA^{-1} = I_3$

$$A A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow A(V_1, V_2, V_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ AV_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{A} V_1 = \tilde{e}_1 \\ \tilde{A} V_2 = \tilde{e}_2 \\ \tilde{A} V_3 = \tilde{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$1^{\underline{ere}}$ étape :

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = \frac{L_1^{(0)}}{2} \\ L_2^{(1)} = L_1^{(1)} - L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} = L_1^{(1)} - L_3^{(0)} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\cancel{2}} \end{array}\right)$$

$2^{\underline{eme}}$ étape :

$$\begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = \frac{L_2^{(1)}}{-\frac{3}{2}} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + \frac{1}{2} L_2^{(2)} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\cancel{2}} \end{array}\right)$$

$3^{\underline{eme}}$ étape :

$$\begin{array}{cccccc} & \phantom{\frac{1}{2}} & \phantom{\frac{1}{2}} & \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = \frac{L_3^{(2)}}{-\frac{4}{3}} \end{array} \qquad \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\tilde{A}} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}}_{\tilde{I}}\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{A} V_1 = \tilde{e}_1 \\ \tilde{A} V_2 = \tilde{e}_2 \\ \tilde{A} V_3 = \tilde{e}_3 \end{cases} \iff \begin{cases} V_1 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)^t \\ V_2 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)^t \\ V_3 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^t \end{cases}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

4) Déduire le déterminant de la matrice A^{-1} :

$$\det(A^{-1}) = \frac{\det(I)}{\det(A)} = \frac{1}{4}$$

5) Déduire la solution X du système $AX = b$

$$AX = b \Longleftrightarrow A^{-1} A X = A^{-1} b$$ (Comme A^{-1} existe)

$$\Longleftrightarrow I_3 X = A^{-1} b$$

$$\Longleftrightarrow X = A^{-1} b$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow X = (1, 1, 1)^t.$$

6) Résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer :

Comme $\det A = 4 \neq 0$ donc le système $Ax = b$ admet une unique solution $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

tq $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$ où A_i : est la matrice obtenue en remplaçant dans la $i^{ème}$ colonne par le vecteur b

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{4} = 1$$

<u>D'où</u> $X = (1, 1, 1)^t$

<u>**Exo 2:**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 3, 6)^t$$

1) Montrer que A est symétrique définie positive (SDP)

- A est symétrique :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix} = A$$ donc A est symétrique

- A définie positive :

On calcul les déterminants des matrices $A_{[k]}$, $k=1,$

$$\det(A_{[1]}) = \det(1) = 1 > 0$$

$$\det(A_{[2]}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$\det(A_{[3]}) = \det(A) = 4 > 0$$

Tous les mineurs principaux sont positifs alors la matrice A est définie positive.

D'où A est symétrique définie positive.

2) Donner la décomposition LU de la matrice A :

Comme A est symétrique définie positive alors $\det A_i$

D'où $A = LU$.

On pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) En utilisant la décomposition LU, résoudre le système $Ax=$

$$AX = b \iff L\underbrace{UX}_{y} = b$$

$$\iff \begin{cases} Ly = b \quad \ldots (1) \\ UX = y \quad \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la solution du système $AX = b$.

4) Déterminer A^{-1} en utilisant cette décomposition:

Comme $\det A = 4 \neq 0$ donc A^{-1} existe.

On a $A A^{-1} = I_3$ où I_3: signifie la matrice identité

Notons par

$$A^{-1} = (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} \qquad I_3 = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{V_1} \quad \underbrace{\quad}_{V_2} \quad \underbrace{\quad}_{V_3}$$

/.

$A A = I_3 \iff A(V_1, V_2, V_3) = (e_1, e_2, e_3)$

$\iff (AV_1, AV_2, AV_3) = (e_1, e_2, e_3)$

Boualem

$\iff \begin{cases} A V_1 = e_1 \\ A V_2 = e_2 \\ A V_3 = e_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} L \underbrace{U V_1}_{y_1} = e_1 \\ L \underbrace{U V_2}_{y_2} = e_2 \\ L \underbrace{U V_3}_{y_3} = e_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} L y_1 = e_1 \\ U V_1 = y_1 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} L y_2 = e_2 \\ U V_2 = y_2 \end{cases} (II) \\ \begin{cases} L y_3 = e_3 \\ U V_3 = y_3 \end{cases} (III) \end{cases}$

De (I) :

$L y_1 = e_1 \iff y_1 = (1, -1, -\frac{1}{2})^t$

$U V_1 = y_1 \iff V_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t$

De (II) :

$L y_2 = e_2 \iff y_2 = (0, 1, -\frac{3}{2})^t$

$U V_2 = y_2 \iff V_2 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2})^t$

De (III) :

$L y_3 = e_3 \iff y_3 = (0, 0, 1)^t$

$U V_3 = y_3 \iff V_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$

De (I), (II) et (III), on aura le resultat final

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

5) Déduire la solution X du système $AX=b$.

$$Ax=b \overset{A^{-1}\text{ existe}}{\Longleftrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow I_3 X = A^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow X = A^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 5/2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exo 3 : Le système $Ax=b$ s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{9}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 = 2 \\ \frac{3}{2}x_2 = 3 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{9}{4}x_3 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Peut-on appliquer la décomposition de Cholesky ?

Il faut vérifier que la matrice A est symétrique définie positive :

- Symétrique : $A^t = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = A$

- Définie positive :

$\det(A_1) = \det(9/4) = 9/4 > 0$

$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 9/4 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{27}{8} > 0$

$\det(A_3) = \det(A) = \frac{15}{2} > 0$

la matrice A est symétrique définie positive alors elle admet la décomposition de Cholesky.

2) La décomposition de cholesky du système (1).

La matrice A est symétrique définie positive, on peut l'écrire sous la forme $A = LL^t$, où L est une matrice triangulaire inférieure. On prend les éléments sur la diagonale de L posit.

On pose : $L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$, $L^t = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$

$$LL^t = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{11}L_{31} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Par identification,

$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$, $L^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

3) Déterminer A^{-1} en utilisant cette décomposition

Comme $\det(A) = \frac{15}{2} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe

donc d'après :

Boyalem $\iff \begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ AV_3 = e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} L\underbrace{L^t V_1}_{y_1} = e_1 \\ L\underbrace{L^t V_2}_{y_2} = e_2 \\ L\underbrace{L^t V_3}_{y_3} = e_3 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} L y_1 = e_1 \\ L^t V_1 = y_1 \end{cases} & (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} L y_2 = e_2 \\ L^t V_2 = y_2 \end{cases} & (\mathrm{II}) \\ \begin{cases} L y_3 = e_3 \\ L^t V_3 = y_3 \end{cases} & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

De (I) : $L y_1 = e_1 \iff y_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{\sqrt{5}}{30}\right)^t$

$L^t V_1 = y_1 \iff V_1 = \left(\frac{9}{20}, 0, \frac{1}{20}\right)^t$

De (II) : $L y_2 = e_2 \iff y_2 = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)^t$

$L^t V_2 = y_2 \iff V_2 = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right)^t$

De (III) : $L y_3 = e_3 \iff y_3 = \left(0, 0, \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^t$

$L^t V_3 = y_3 \iff V_3 = \left(\frac{1}{20}, 0, \frac{9}{20}\right)$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/20 & 0 & 1/20 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1/20 & 0 & 9/20 \end{pmatrix}$$

4) Déduire le déterminant de A :

$$\det(A) = \det(L\,L^t) = \det(L)\det(L^t) = (\det L)^2$$

$$= (L_{11}\,L_{22}\,L_{33})^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{15}{2}.$$

5) Déduire la solution X du système $AX=b$:

$AX = b \iff A^{-1}AX = A^{-1}b$ (det $A \neq 0$ donc A^{-1} existe)

$$\iff X = \begin{pmatrix} 9/20 & 0 & 1/20 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1/20 & 0 & 9/20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la solution du système (1).

Dr Boualem