Exercice : soit p= f(K,L) = $\mathbf{9K^{3/2}L^{2/3}}$ une fonction de production d'un producteur rationnel. Les prix des facteurs de production sont P_K = 6da , P_L = 4da , et les ressources disponibles du producteur sont Rd= 130 da.

1/ les quantités de capital et de travail que le producteur doit utiliser pour avoir le maximum de production, en utilisant la méthode de Lagrange ? (2,5 points)

On a : $\begin{cases} \max p = f(k,l) = 9K^{3/2}L^{2/3} \\ 130 = 6K + 4L \end{cases}$

On a: L(K,L,λ) = $9K^{2/3}L^{3/2} + \lambda\,(130 - 6K - 4L)$

L est maximale => $\begin{cases} L'(k) = 0 \\ L'(l) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} 13{,}5K^{1/2}L^{2/3} - 6\lambda = 0 \\ 6K^{3/2}L^{-1/3} - 4\lambda = 0 \\ 130 - 6K - 4L = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} \lambda = \frac{13{,}5K^{1/2}L^{2/3}}{6} \quad \ldots(1) \\ \lambda = \frac{6K^{3/2}L^{-1/3}}{4} \quad \ldots(2) \\ 130 = 6K + 4L \ldots(3) \end{cases}$

De (1) et (2) on a : $\frac{13{,}5K^{1/2}L^{2/3}}{6} = \frac{6K^{3/2}L^{-1/3}}{4}$ => $\frac{13{,}5L^{2/3}}{6K^{-1/2}} = \frac{6K^{3/2}}{4L^{1/3}}$ => 54 L = 36K => K= 1,5L…(4)

On remplace (4) dans (3) on obtient : 130 = 6(1,5L)+ 4L => 130 = 13 L =>L =10 unités

Donc K = 1,5 (10) = 15 unités.

2/ Quel est l'effet d'une augmentation de 20% de capital sur la production (toute chose égale par ailleurs ? (2,5 points).

$E_{P/k} = \frac{\partial p}{\partial K} * \frac{K}{p} = 13{,}5K^{1/2}L^{2/3} \cdot \frac{K}{9K^{2/3}L^{3/2}} = \frac{13{,}5K^{3/2}L^{2/3}}{9K^{3/2}L^{2/3}} = 1{,}5$

$E_{P/k} = 1{,}5$	ΔK/K	ΔP/P	$\frac{\Delta p}{P} = \frac{(20\%).(1{,}5\%)}{1\%} = 30\%$
	+1%	+1,5%	
	+20%	ΔP/P	

3/Quel est l'effet d'une augmentation simultanée de capital et de travail de 120% ? (2,5 points)

On a: f(ak, al) = $9(ak)^{3/2}\ (al)^{2/3} = 9\ a^{3/2}k^{3/2}\ a^{2/3}l^{2/3} = a^{\mathbf{13/6}}\,9\,k^{3/2}\ l^{2/3} = a^{13/6}.P$

On a : a= $\frac{120}{100}$ +1 = 2,2 Donc: f(2,2k, 2,2l) = $2{,}2^{13/6}$.P = 5,51 P . Si k et l augmentent à 120%, la production sera multipliée par 5,51 .

4/Quel est l'effet d'une augmentation des ressources disponibles de 20% sur la production ?

On a: $\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta Rd}$ => ΔP = λ*ΔRd on a : ΔRd = 0,2 *130 = 26 da.

$\lambda = \frac{13{,}5(15)^{1/2}(10)^{2/3}}{6}$ = 40,44 unités /da donc: ΔP = 26* 40,44 =1051,44 unités.