

Exercice : soit $p = f(K,L) = 9K^{2/3}L^{3/2}$ une fonction de production d'un producteur rationnel. Les prix des facteurs de production sont $P_K = 4da$, $P_L = 6da$, et les ressources disponibles du producteur sont $Rd = 130 da$.

1/ les quantités de capital et de travail que le producteur doit utiliser pour avoir le maximum de production, en utilisant la méthode de Lagrange ? (2,5 points)

On a :
$$\begin{cases} \max p = f(k, l) = 9K^{2/3}L^{3/2} \\ 130 = 4K + 6L \end{cases}$$

On a: $L(K,L,\lambda) = 9K^{2/3}L^{3/2} + \lambda (130 - 4K - 6L)$

$$L \text{ est maximale} \Rightarrow \begin{cases} L'(k) = 0 \\ L'(l) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6K^{-1/3}L^{3/2} - 4\lambda = 0 \\ 13,5K^{2/3}L^{1/2} - 6\lambda = 0 \\ 130 - 4K - 6L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6K^{-1/3}L^{3/2}}{4} \dots (1) \\ \lambda = \frac{13,5K^{2/3}L^{1/2}}{6} \dots (2) \\ 130 = 4K + 6L \dots (3) \end{cases}$$

De (1) et (2) on a : $\frac{6K^{-1/3}L^{3/2}}{4} = \frac{13,5K^{2/3}L^{1/2}}{6} \Rightarrow \frac{6L^{3/2}}{4K^{1/3}} = \frac{13,5K^{2/3}}{6L^{-1/2}} \Rightarrow 36L = 54K \Rightarrow L = 1,5K \dots (4)$

On remplace (4) dans (3) on obtient : $130 = 4K + 6(1,5K) \Rightarrow 130 = 13K \Rightarrow K = 10$ unités

Donc $L = 1,5(10) = 15$ unités.

2/ Quel est l'effet d'une augmentation de 20% de capital sur la production (toute chose égale par ailleurs) ? (2,5 points).

$$E_{P/k} = \frac{\partial p}{\partial K} * \frac{K}{p} = 6K^{-1/3}L^{3/2} * \frac{K}{9K^{2/3}L^{3/2}} = \frac{6K^{2/3}L^{3/2}}{9K^{2/3}L^{3/2}} = \frac{2}{3}$$

$E_{P/k} = 2/3$	$\Delta K/K$	$\Delta P/P$	$\frac{\Delta p}{P} = \frac{(20\%)(2/3\%)}{1\%} = 13,33\%$
	+1%	+2/3%	
	+20%	$\Delta P/P$	

3/ Quel est l'effet d'une augmentation simultanée de capital et de travail de 120% ? (2,5 points)

On a: $f(ak, al) = 9(ak)^{2/3} (al)^{3/2} = 9 a^{2/3} k^{2/3} a^{3/2} l^{3/2} = a^{13/6} 9k^{2/3} l^{3/2} = a^{13/6} .P$

On a : $a = \frac{120}{100} + 1 = 2,2$ Donc: $f(2,2k, 2,2l) = 2,2^{13/6} .P = 5,51 P$. Si k et l augmentent à 120%, la production sera multipliée par 5,51.

4/ Quel est l'effet d'une augmentation des ressources disponibles de 20% sur la production ?

On a: $\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta Rd} \Rightarrow \Delta P = \lambda * \Delta Rd$ on a : $\Delta Rd = 0,2 * 130 = 26 da$.

$\lambda = \frac{6(10)^{-1/3}(15)^{3/2}}{4} = 40,44$ unités /da donc: $\Delta P = 26 * 40,44 = 1051,44$ unités.