Mécanique Quantique II (2013-2014)
Solution Interrogation 3

Pour les deux sujets les trois premières questions sont les mêmes :

1- Par conjugaison hermétique on trouve :

$S_x^+ = S_x,\ S_y^+ = S_y,\ S_z^+ = S_z$ Ainsi les trois opérateurs sont hermitiens

2- Le calcul des éléments de matrices pour chaque opérateur donne

$$S_x = \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3- En utilisant les expressions matricielles précédentes, on trouve que

$\left[S_x, S_y\right] = S_x S_y - S_y S_x = i\hbar S_z$

Pour la base :

$$|x,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

1- On démontre facilement les relations d'orthonormalité et de fermeture :

$$\langle x,\varepsilon | x,\varepsilon' \rangle = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad \varepsilon = \pm$$

$$\sum_{\varepsilon} |x,\varepsilon\rangle\langle x,\varepsilon| = |x,+\rangle\langle x,+| + |x,-\rangle\langle x,-| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2-

Expression de S_x

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle x,+|S_x|x,+\rangle & \langle x,+|S_x|x,-\rangle \\ \langle x,-|S_x|x,+\rangle & \langle x,-|S_x|x,-\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x,+|S_x|x,+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{\hbar}{2}$$

$$\langle x,+|S_x|x,-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle x,-|S_x|x,+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle x,-|S_x|x,-\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; -\tfrac{1}{2}\hbar$$

De même pour S_y , on trouve

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Pour S_z

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la base

$$|y,\pm\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

1- On démontre facilement les relations d'orthonormalité et de fermeture.

2- De même

$$S_x = \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_y = \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S_z == \tfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$