

Exo 1

N ^{bre} de pièces x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i \log x_i$	$\frac{n_i}{x_i}$	$n_i x_i^2$
1	6	6	0	6	6
2	11	22	3,31	5,5	44
3	15	45	7,16	5	135
4	10	40	6,02	2,5	160
5	8	40	5,6	1,6	200
TOTAL	50	153	22,09	20,6	545

1) calcul des moyennes.

- La moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{153}{50} = 3,06.$$

- La moyenne harmonique

$$H = \frac{N}{\sum \frac{n_i}{x_i}} = \frac{50}{20,6} = 2,43.$$

- La moyenne géométrique

$$G = \left(\prod x_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{N}} \iff \log G = \frac{1}{N} \log \left(\prod x_i^{n_i} \right) \\ = \frac{1}{N} \sum n_i \log x_i$$

- La moyenne quadratique

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{N} \sum n_i x_i^2} = \sqrt{\frac{545}{50}} = 3,3$$

Donc : $\log G = \frac{22,09}{50} = 0,4418$

D'où $G = 10^{0,4418}$

$G = 2,76$

2. Nous remarquons que :

$$H < G < \bar{x} < \varphi.$$

Exo 2 :

Calcul du taux de croissance moyen du chiffre d'affaire

$$G = \sqrt[N]{\prod x_i^{n_i}} = \left(\prod x_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{N}}$$

On a : $x_i = 1 + r_i$

$$G = \left((1,05)^2 \times (1,09)^3 \times (1,11)^4 \right)^{\frac{1}{9}} = (2,167)^{\frac{1}{9}} = 1,089$$

Le taux de croissance moyen du CA est : $t_r = (G - 1) \times 100$

$$= \frac{(1,089 - 1) \times 100}{1} = +8,9\%$$

Exo 3:

- Calcul de la vitesse moyenne.

La vitesse moyenne des deux machines correspond à la moyenne harmonique:

$$H = \frac{N}{\sum \frac{n_i}{x_i}}, \text{ Donc } H = \frac{10000}{\frac{7000}{1500} + \frac{3000}{2000}} = 1621,62 \approx 1622$$

La vitesse moyenne est : 1622 pièces / heures.

Exo 4:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$n_i x_i^3$	$n_i x_i^4$
0	10	0	0	0	0
1	30	30	30	30	30
2	25	50	100	200	400
3	12	36	108	324	972
4	10	40	160	640	2560
5	13	65	325	1625	8150
TOTAL	100	221	723	2819	12112

1) calcul des moments.

$$m_1 = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{221}{100} = 2,21 = \bar{x}$$

$$m_2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} = \frac{723}{100} = 7,23$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i x_i^3}{N} = \frac{2819}{100} = 28,19$$

$$m_4 = \frac{\sum n_i x_i^4}{N} = \frac{12112}{100} = 121,12$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \Rightarrow \mu_3 = 28,19 - 3(2,21 \times 7,23) + 2(2,21)^3 = 1,84$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

$$= 121,12 - 4(2,21 \times 28,19) + 6((2,21)^2 \times 7,23) - 3(2,21)^4 = 11,23$$

2. Calcul des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement

* Coefficients d'asymétrie:

a) coefficient de Fisher

$$F_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1,84}{(1,53)^3} = 0,51$$

b) coefficient de Yule:

$$C_y = \frac{p_3 - p_2 - (p_2 - p_1)}{p_3 - p_1} = \frac{p_3 - 2p_2 + p_1}{p_3 - p_1} = \frac{3 - 2(2) + 1}{3 - 1} = 0$$

c. Coefficient de Pearson β_2

$$\beta_2 = \frac{\mu_4(x)}{\mu_2^2(x)} \Rightarrow \beta_2 = \frac{(1,84)^2}{(2,35)^3} = 0,26$$

* Coefficients d'aplatissement

a. Coefficient de Pearson β_3

$$\beta_3 = \frac{\mu_4(x)}{\mu_2^2(x)} = \frac{12,24}{(2,35)^2} = 2,217$$

b. Coefficient de Fisher

$$F_2 = \beta_3 - 3 = 2,217 - 3 = -0,783$$

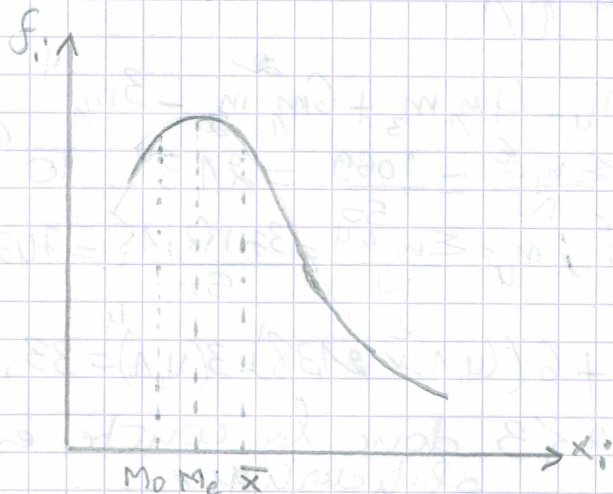
3. La forme de la courbe des fréquences

Asymétrie

$F_1 > 0$, nous disons que la courbe est oblique à gauche.

$C_y = 0$: La nullité de ce coefficient n'est pas un indice de symétrie fiable, si l'asymétrie porte essentiellement sur des « queues » de distribution.

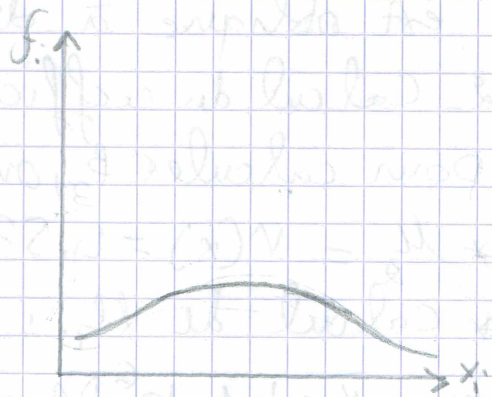
$\beta_2 \neq 0$: Le sens de l'étalement est donné par le signe de μ_3 . Comme $\mu_3(x) > 0$ nous disons que la courbe est oblique à gauche (M_0 est à gauche de M_2)



Aplatissement

$\beta_3 < 3$ donc la courbe platycurtique (plus aplatie que la courbe normale).

$F_2 < 0$ donc la courbe est platycurtique.



courbe platycurtique

Exo 5:

Impôts nets 10 ⁶ DA	h_i	C_i	h_{ic}	$n_i \cdot C_i$	$n_i \cdot C_i^2$	$n_i \cdot C_i^3$	$n_i \cdot C_i^4$
[0, 1,5[	8	0,75	8	6	4,5	3,38	2,53
[1,5, 3,5[	13	2,5	9,75	32,5	81,25	203,13	507,8
[3,5, 5,5[	11	4,5	8,25	49,5	222,75	1022,38	4510,69
[5,5, 7,5[	18	6,5	18,5	117	760,5	4993,25	32131,13
TOTAL	50	—	—	205	1069	6152,14	37152,15

1- Calcul du coefficient de Pearson B_1

pour calculer le coefficient B_1 , on doit d'abord calculer la moyenne, le mode et l'écart type.

* La moyenne : $\bar{X} = \frac{\sum n_i \cdot C_i}{N} = \frac{205}{50} = 4,1 \cdot 10^6$ DA

* Le mode : La classe modale est [5,5, 7,5[

$$Mo = X_{\min} + \frac{\Delta h_i}{\Delta h_i + \Delta h_{i+1}} \cdot a_i \Rightarrow Mo = 5,5 + \frac{18,5 - 8,25}{(18,5 - 8,25) + (18,5 - 0)} \times 2 = 6,06 \cdot 10^6 \text{ DA}$$

* La variance

$$V(x) = \frac{\sum n_i \cdot C_i^2}{N} - \bar{X}^2 \Rightarrow V(x) = \frac{1069}{50} - (4,1)^2 = 4,57 \cdot 10^6 \text{ DA}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 2,13 \cdot 10^6 \text{ DA}$$

$$B_1 = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma(x)} \Rightarrow B_1 = \frac{4,1 - 6,06}{2,13} = -0,92 \text{ } \rightarrow \text{donc la courbe}$$

est oblique à droite.

2- Calcul du coefficient d'aplatissement de Pearson B_3 .
pour calculer B_3 , on doit d'abord calculer μ_2 et μ_4 .

$$* \mu_2 = V(x) = 4,57 \cdot 10^6 \text{ DA}$$

$$* \text{Calcul de } \mu_4 : \mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

$$m_1 = \bar{X} = 4,1 \cdot 10^6 \text{ DA} ; m_2 = \frac{\sum n_i \cdot C_i^2}{N} = \frac{1069}{50} = 21,38 \cdot 10^6$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i \cdot C_i^3}{N} = \frac{6152,14}{50} = 123,04 \cdot 10^6 ; m_4 = \frac{\sum n_i \cdot C_i^4}{N} = \frac{37152,15}{50} = 743,04 \cdot 10^6$$

$$\mu_4 = 743,04 - 4(4,1 \cdot 123,04) + 6(4,1)^2 \cdot 21,38 - 3(4,1)^4 = 33,84$$

$$B_3 = \frac{\mu_4(x)}{\mu_2(x)^2} = \frac{33,84}{(4,57)^2} = 1,62 < 3 \text{ donc la courbe est platycurtique.}$$

(4)

Exo 6.

Salaires	n_i	c_i	f_i	$f_i^{\nearrow}$	Masse salariale $\frac{c_i}{n_i}$	$f_i' = \frac{n_i c_i}{\sum n_i c_i}$	$f_i'^{\nearrow}$
[500 1500[	50	1000	0,25	0,25	50 000	0,125	0,125
[1500 2500[	125	2000	0,625	0,875	250 000	0,625	0,75
[2500 5500[	25	4000	0,125	1	100 000	0,25	1
TOTAL	200	-	1		400 000	1	

1. Calcul de la médiane

La classe médiane est [1500 2500[

$$Me = x_{\min} + \frac{0,5 - f_{Me-1}^{\nearrow}}{f_{\text{me}}} = 1500 + \frac{0,5 - 0,25}{0,625} \cdot 1000 = 1900$$

Interprétation : 50% des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 1900 € et 50% ont un salaire supérieur à 1900 €.

2. Calcul de la médiale

La classe médiale est [1500 2500[

$$ML = x_{\min} + \frac{0,5 - f_{ML-1}^{\nearrow}}{f_{ML}'} = 1500 + \frac{0,5 - 0,125}{0,625} \times 1000 = 2100$$

Interprétation : 50% de la masse totale des salaires va aux salariés gagnant moins de 2100 euros.

3. Calcul de l'écart ΔM (Médiale - Médiane)

$$\Delta M = ML - Me = 2100 - 1900 = 200$$

4. Mesure de la concentration

$$\text{Étendu : } E = x_{\max} - x_{\min} = 5500 - 500 = 5000$$

On remarque que ΔM est petite par rapport à l'étendue, donc la concentration est faible.

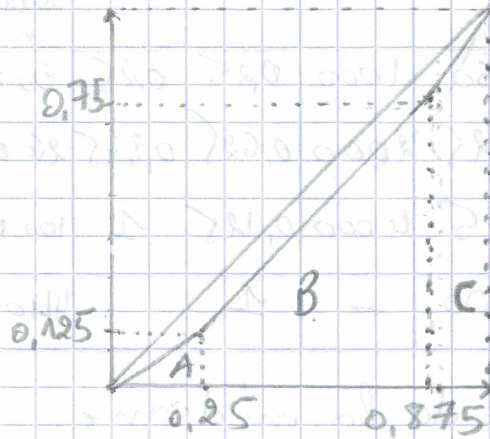
$$\frac{\Delta M}{E} = \frac{200}{5000} = 0,04 = 4\%$$

Comme la concentration des salaires est de l'ordre de 4%, donc elle est faible.

5. Calcul de l'indice de Gini

pour calculer l'indice de Gini, il suffit de disposer les calculs comme suit.

B_{i-1}	B_i	$B_{i-1} + B_i$	f_i	$(B_{i-1} + B_i) \times f_i$
0	0,125	0,125	0,25	0,03125
0,125	0,75	0,875	0,625	0,546875
0,75	1	1,75	0,125	0,21875
—	—			0,796875



-courbe de Lorenz

$IG = 2 \times \text{aire de concentration}$

$$= 1 - \sum (B_{i-1} + B_i) \times f_i$$

$$= 1 - 0,796875$$

$$= 0,203125$$

$IG = 20,31\%$ la concentration est néanmoins faible

Commentaire

L'indice de Gini appartient à $[0, 1]$ et plus il est proche de 1 plus la répartition des salaires est inégalitaire.

Ici, comme 0,2031 est faible, la concentration des salaires est faible, les salaires sont assez bien répartis sur l'ensemble des salaires.