Corrigé de la série 3 de stat2

Corrigé de l'exercice 1

1-La loi de probabilité

X : la variable aléatoire associée à chaque individu selon le type du groupe sanguin, tel que :
{O→0, A→1, B→2, AB→3}   d'où : $X = \{0,1,2,3\}$.

$P(X=0) = \frac{NCF}{NCP} = \frac{1470}{3000} = 0{,}49$; $P(X=1) = \frac{NCF}{NCP} = \frac{1140}{3000} = 0{,}38$

$P(X=2) = \frac{NCF}{NCP} = \frac{300}{3000} = 0{,}1$; $P(X=3) = \frac{NCF}{NCP} = \frac{90}{3000} = 0{,}03$

X	0	1	2	3	La somme
$P(X=x_i)$	0,49	0,38	0,1	0,03	1
$F_X(x_i)$	0,49	0,87	0,97	1	-
$x_i \times p_i$	0	0,38	0,2	0,09	0,67
$x_i^2 \times p_i$	0	0,38	0,4	0,27	1,05

2- La fonction de répartition $F_X(x_i)$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0{,}49\ si\ 0 \le x < 1 \\ 0{,}87 si\ 1 \le x < 2 \\ 0{,}97 si\ 2 \le x < 3 \\ 1 & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

3- Calcul de l'espérance, la variance et l'écart type de X

- **L'espérance :** $E(X) = \sum x_i\, p_i = 0{,}67$
- **La variance :** $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$V(X) = \sum x_i^2\, p_i - (0{,}67)^2 = 1{,}05 - 0{,}4489 = 0{,}6011$$

- **L'écart type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}6011} = 0{,}775$

Corrigé de l'exercice 2

I.1.a-La loi de probabilité

X : la variable aléatoire associé au gain du joueur $X = \{-2DA, 1DA, 2DA, 3DA\}$

x_i	-2	1	2	3	Somme
$P(X=x_i)$	3/6	1/6	1/6	1/6	1
$F_X(x_i)$	3/6	4/6	5/6	1	-
$x_i \times p_i$	-1	1/6	2/6	3/6	0
$x_i^2 \times p_i$	2	1/6	4/6	9/6	4,33

b-La fonction de répartition $F_X(x_i)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -2 \\ 3/6 & si -2 \leq x < 1 \\ 4/6 & si\ 1 \leq x < 2 \\ 5/6 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

2-Calcul de l'espérance : $E(X) = \sum x_i\, p_i = 0\ DA$

3- Calcul de la variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$V(X) = \sum x_i^2\, p_i - (0)^2 = 4{,}33 - 0 = 4{,}33$$

II. 1 -La loi de probabilité de Y

Soit Y : la variable aléatoire indiquant le gain (positif ou négatif) du joueur

$Y = \{-30, -20, 0, +30\}$

y_i	-30	-20	0	+30	Somme
$P(Y = y_i)$	2/6	1/6	1/6	2/6	1
$y_i \times p_i$	-10	-20/6	0	10	-20/6=-3,33

2-Calcul de l'espérance : $E(Y) = \sum y_i \times p_i - 3{,}33\ DA$

Comme ($E(X) > E(Y)$), donc la première variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur car dans le premier cas, le joueur ne perd rien en moyenne par rapport par rapport au deuxième cas où il pourrait perdre 3,33DA en moyenne.

<u>Corrigé de l'exercice 3</u>

<u>Partie I :</u>

1. **Détermination de la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}x & si\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 & si\ non \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{\alpha}x & si\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 & si\ x > 120 \end{cases}$$

f est densité de probabilité si: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{120} \frac{1}{\alpha}x\, dx + \int_{120}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2\alpha}x^2\right]_0^{120} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2\alpha}(120)^2 - 0\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 14400 \Leftrightarrow \alpha = 7200$$

D'où : $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{7200}x & si\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 & si\ x > 120 \end{cases}$

2. Détermination de la fonction de répartition

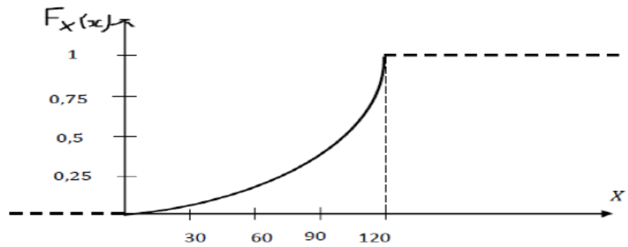
$\forall x \in IR: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- **<u>Si $x < 0$,</u>** $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
- **<u>Si $0 \leq x \leq 120$</u>**,

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{7200} t\ dt = \left[\frac{1}{14400} t^2\right]_0^x = \frac{1}{14400} x^2$

- **<u>Si$x > 120$</u>**,

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{120} \frac{1}{7200} t\ dt + \int_{120}^{x} 0\,dt = \left[\frac{1}{14400} t^2\right]_0^{120} = 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{14400}x^2 & si\ 0 \leq x \leq 120 \\ 1 & si\ x > 120 \end{cases}$	**<u>La représentation graphique de F(X)</u> :** 

3. Calcul de l'espérance et la variance

- **L'espérance :**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \times 0\,dx + \int_{0}^{120} x \times \frac{1}{7200} x\,dx + \int_{120}^{+\infty} x \times 0\,dx$$

$$E(X) = \left[\frac{1}{21600} x^3\right]_0^{120} = \frac{1728000}{21600} = 80$$

- **La variance :**

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \times 0\,dx + \int_{0}^{120} x^2 \times \frac{1}{7200} x\,dx + \int_{120}^{+\infty} x^2 \times 0\,dx$$

$$E(X^2) = \left[\frac{1}{28800} x^4\right]_0^{120} = \frac{207360000}{28800} = 7200$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7200 - (80)^2 = 800$$

4. Calcul des probabilités

$$P(70 \leq X \leq 90) = F(90) - F(70) = \frac{1}{14400} \times 90^2 - \frac{1}{14400} \times 70^2 = 0{,}222$$

$$P(X < 20) = F(20) = \frac{1}{14400} \times 20^2 = 0,027$$

$$P(X > 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - F(100) = 1 - \frac{1}{14400} 100^2 = 0,305$$

Calcul de l'espérance de Y

On a : $Y = 0,25X^3 - 40X^2 + 2500X$

$E(Y) = E(0,25X^3 - 40X^2 + 2500X)$

$E(Y) = 0,25 \times E(X^3) - 40 \times E(X^2) + 2500 \times E(X)$

On a déjà calculé $E(X) = 80$ et $E(X^2) = 7200$, il nous manque juste $E(X^3)$ pour calculer $E(Y)$.

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x^3 \times 0\, dx + \int_{0}^{120} x^3 \times \frac{1}{7200} x\, dx + \int_{120}^{+\infty} x^3 \times 0\, dx$$

$$E(X^3) = \left[\frac{1}{36000} x^5\right]_0^{120} = \frac{248832000000}{36000} = 691200$$

$E(Y) = 0,25 \times E(X^3) - 40 \times E(X^2) + 2500 \times E(X)$

D'où : $E(Y) = 0,25 \times 691200 - 40 \times 7200 + 2500 \times 80 = 84800.$

Partie II : On a : $F(x) = \begin{cases} 0\, pour \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} pour x \geq 0 \end{cases}$

1. **La densité de probabilité** : $f(x) = \grave{F}(x) = \begin{cases} 0\, pour \quad x < 0 \\ e^{-x} pour x \geq 0 \end{cases}$

2. Calcul de l'espérance : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x \times 0\, dx + \int_{0}^{+\infty} x \times e^{-x}\, dx$

Faisons une intégration par parties : $\int_0^{+\infty} u\grave{v} = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \grave{u}v$

on pose : $\begin{cases} u = x \\ \grave{v} = e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} \grave{u} = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$E(X) = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\, dx \Rightarrow E(X) = \left[-x \frac{1}{e^x}\right]_0^{+\infty} - [e^{-x}]_0^{+\infty}$$

$$lim_{x \to +\infty}\left(-x \times \frac{1}{e^x}\right) - \left(-0 \times \frac{1}{e^0}\right) - \left[\frac{1}{e^x}\right]_0^{+\infty} = 0 - 0 - \left[\frac{1}{e^{+\infty}} - \frac{1}{e^0}\right] = +1$$

On sait que : $lim_{x \to +\infty}\left(-x \times \frac{1}{e^x}\right) = 0, d'o$ù: $E(X) = +1$

3. Calcul de probabilité $P(2 < X \leq 4)$

$P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2})$

$P(2 < X \leq 4) = (1 - 0,01831564) - (1 - 0,13533528) = 0,11701964$