Corrigé de l’examen de stat II 2023

Corrigé de l’exercice n°01

x_i	-2	-1	3	8	La somme
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1	1
$F_X(x_i)$	0,4	0,6	0,9	1	-
$x_i \times p_i$	-0,8	-0,2	0,9	0,8	0,7
$x_i^2 \times p_i$	1,6	0,2	2,7	6,4	10,9

1) Pour que le tableau représente une loi de probabilité, il faut que : $\sum p_i = 1$

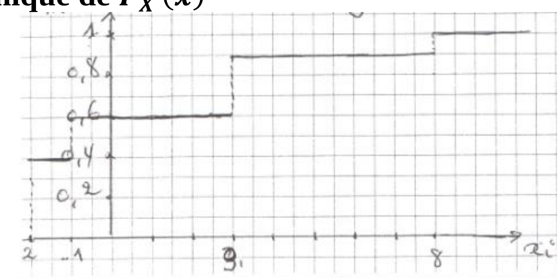
On a : $\sum p_i = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$

Comme $\sum p_i = 1$, donc le tableau représente bien une loi de probabilité

2) Détermination de la fonction de répartition $F_X(x_i)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -2 \\ 0{,}4 & si -2 \leq x < -1 \\ 0{,}6 & si -1 \leq x < 3 \\ 0{,}9 & si\ 3 \leq x < 8 \\ 1 & si\ x \geq 8 \end{cases}$$

La représentation graphique de $F_X(x)$



3- Calcul de $E(X)$: $E(X) = \sum x_i \times p_i = 0{,}7$

Calcul de $V(X)$: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$V(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (0{,}7)^2 = 10{,}9 - 0{,}49 = 10{,}41$$

4) Calcul des probabilités

- $P(X \leq 0) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$
- $P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

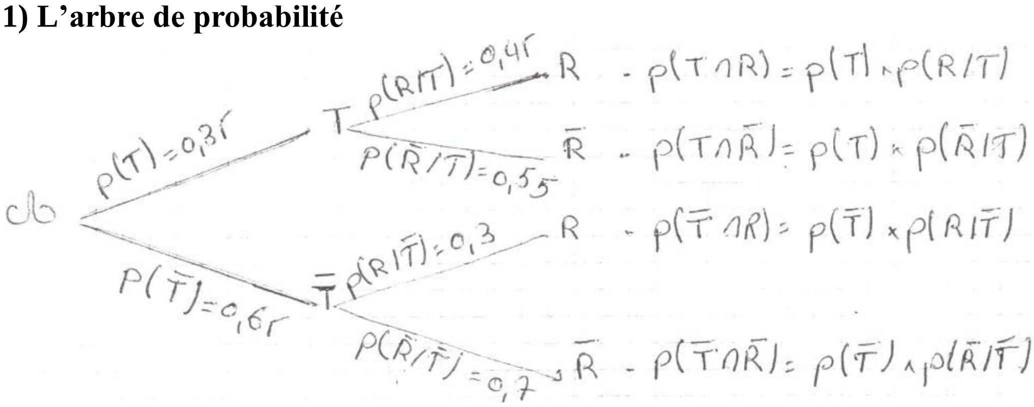
Corrigé de l’exercice n°02

Soit les événements suivants :

T : L’appartement est de type F3; $\bar{T}$: l’appartement est de type F4

R : l’appartement loué est rentable ; $\bar{R}$: l’appartement loué n’est pas rentable .

1) L’arbre de probabilité



2) Donnons les probabilités :

$P(T) = 0{,}35 \quad p(\bar{T}) = 0{,}65 \quad , \quad p(R/T) = 0{,}45 \;\; et \;\; p(R/\bar{T}) = 0{,}3$

3) l'événement $(T \cap \bar{R})$: L'appartement loué de type F3et il n'est pas rentable.

$P(T \cap \bar{R}) = P(T) \times P(\bar{R}/T) = 0{,}35 \times 0{,}55 = 0{,}192$

4) La probabilité qu'un appartement loué soit rentable

$P(R) = P(T \cap R) + P(\bar{T} \cap R)$

$P(R) = P(T) \times P(R/T) + P(\bar{T}) \times P(R/\bar{T})$

$P(R) = 0{,}35 \times 0{,}45 + 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}35$

5) La probabilité que l'appartement soit de type F3 sachant qu'il n'est pas rentable

$P(T/\bar{R}) = \frac{P(T \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(T) \times P(\bar{R}/T)}{1 - P(R)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}55}{1 - 0{,}35} = 0{,}296$

***<u>Corrigé de l'exercice n°03</u>* :**

On a X : une variable aléatoire associée au quotient intellectuel (QI) qui suit une loi normale de $\mu = 100$ et $\sigma = 15$

C'est-à-dire :$X \sim N(100{,}15)$

On a : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tel que $Z \sim N(0{,}1)$

1) La probabilité qu'un individu ait un QI inférieur à 75

- $P(X < 75) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{75-100}{15}\right) = P(Z < -1{,}67)$
- $P(X \leq 75) = \Phi(-1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475 = 4{,}75\%$

2) La probabilité qu'un individu ait un QI supérieur à 135

- $P(X > 135) = 1 - P(X \leq 135) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{135-100}{15}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}33)$
- $P(X > 30) = 1 - \Phi(2{,}33) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099 \approx 1\%$

3) La probabilité qu'un individu ait un QI compris entre 75 et 135

- $P(75 < X < 135) = P\left(\frac{75-100}{15} < Z < \frac{135-100}{15}\right) = P(-1{,}67 < Z \leq 2{,}33)$

$P(75 < X < 135) = \Phi(2{,}33) - \Phi(-1{,}67) = \Phi(2{,}33) - [1 - \Phi(1{,}67)]$

$= 0{,}9901 - 0{,}0475 = 0{,}9426 = 94{,}26\%$

4) Calcul de la limite telle que la probabilité d'avoir un QI plus petit est de 20%

$$P(X < x) = 0{,}2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-100}{15}\right) = 0{,}2$$

On a : $p = 0{,}2 < 0{,}5 \Rightarrow \left(\frac{x-100}{15}\right)$ est une valeur négative

$$\Rightarrow P\left(Z < -\left(\frac{x-100}{15}\right)\right) = 0{,}8$$

Selon la table de la loi normale centrée réduite on obtient : $-\left(\frac{x-100}{15}\right) = 0{,}84$

$$\Rightarrow -x + 100 = 15 \times 0{,}84 \Rightarrow x = 100 - 12{,}6 = 87{,}4$$

Donc $P(X \leq 87{,}4) = 0{,}20$

$\Rightarrow$ 20% des individus ont un QI moins de 87,4