Corrigé de l'examen STAT2

Exercice 1 08/08

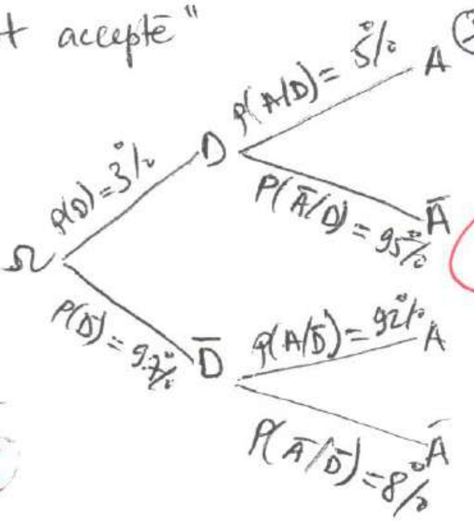
D : "Défaut" ; A : "Pot accepté"

① $P(D) = 3\%$ 0,5 ; $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 97\%$ 0,5

$P(\bar{A}/D) = 95\%$ 0,5

$P(A/\bar{D}) = 92\%$ 0,5

② Arbre de prob 1



③ $A \cap \bar{D}$: "le pot est accepté et ne présente pas de défaut" 0,5

- $P(A \cap \bar{D}) = ??$

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{D}) = P(A/\bar{D}) \times P(\bar{D}) = 0{,}92 \times 0{,}97 = 0{,}8924}$$

0,5 0,5

④ $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D})$ 0,5

$= \boxed{P(A/D) \times P(D) + P(A/\bar{D}) \times P(\bar{D})}$ 0,5

$= 0{,}05 \times 0{,}03 + 0{,}92 \times 0{,}97 = 0{,}8939$ 0,5

⑤ $P(\bar{D}/\bar{A}) = ??$

$$P(\bar{D}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}/\bar{D}) \times P(\bar{D})}{1 - P(A)} = \frac{0{,}08 \times 0{,}97}{1 - 0{,}8939} = 0{,}7313$$

0,5 0,5 0,5 0,5

Exercice 2 : 07/07

X : "le nbre de voitures neuves".

x_i	0	1	2	3	4	Total
$P(X = x_i)$	0,02	0,08	0,2	0,3	0,4	1
F_X	0,02	0,1	0,3	0,6	1	–
$x_i P_i$	0	0,08	0,4	0,9	0,16	1,54
$x_i^2 P_i$	0	0,08	0,8	2,7	6,4	9,98

① Le tableau vérifie une loi de prob $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = 1$

donc : $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$ 0,5

$0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$

Alors, le tableau vérifie une loi de prob de X 0,5

1

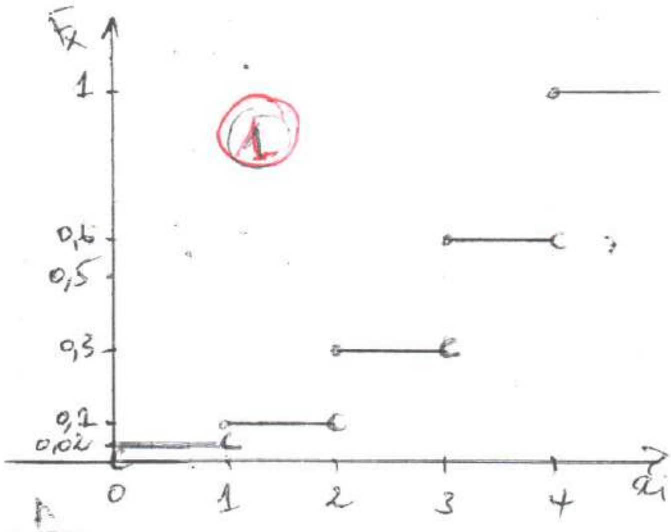
② Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \quad 0{,}5$$

fnc :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}02 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad 0{,}5$$

Représentat. graphique :



③ Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 2{,}98$ 0,5 0,5

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad 0{,}5 \quad = 9{,}98 - (2{,}98)^2 = 1{,}0996 \quad 0{,}5$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 9{,}98 \quad 0{,}5$$

④ $P(X \leq 0) = F_X(0) = 0{,}02$ 0,5

$P(1 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ 0,5

$F_X(2{,}5) = 0{,}3$ 0,5

Exercice ③ : 5/5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① Fonction de répartition :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad 0{,}5$$

- Si $x < -1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$ 0,5
- Si $-1 \leq x < 1$: $F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt}_{0} + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 0,5
- Si $x \geq 1$: $F_X(x) = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dt = 1$ 0,5

donc $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq +1 \end{cases}$$ 0,5

② $P(0 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = 0{,}5$ 0,5 0,5

③ Espérance : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$ 0,5

$$E(X) = \int_{-1}^{+1} x \cdot \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^{+1} = 0$$ 0,5 0,5