

correction l'intégration 4 :

1) la surface adaptée est: un cylindre de rayon r et de hauteur h , et dont les extrémités sont perpendiculaires à l'axe (OZ).

2) le champ électrique en tout point de l'espace.

Le cylindre chargé divise l'espace en deux régions ($r < R$ et $r > R$), le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss S_G pour les deux régions est donné par:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}) &= \oiint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

S_1, S_2 : Surface des deux extrémités du cylindre.

S_L = Surface latérale du cylindre.

$\vec{E} \perp d\vec{S}_1$ et $\vec{E} \perp d\vec{S}_2$ le flux correspondant est nul.

Sur la surface latérale; $\vec{E} \parallel d\vec{S}_L$.

$$\begin{aligned}\text{donc: } \Phi(\vec{E}) &= \iint_{(S_L)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = E \iint_{S_L} dS_L = ES_L = E 2\pi r h \\ &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r h \epsilon_0} \quad \text{ou bien} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r h \epsilon_0} \vec{u}_r$$

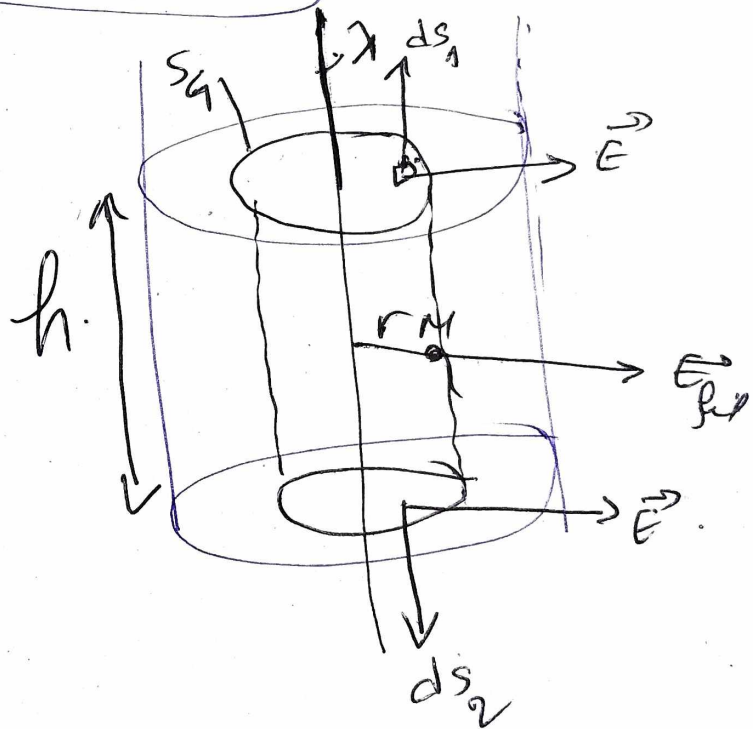
Région ($r < R$).

La charge à l'intérieur de S_G est celle portée par le fil chargé de longueur h d'où

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{Fil}(h)} = \lambda h$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

ou bien $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$



Région ($r > R$).

La charge contenue dans S_G est égale à la charge du fil de longueur h plus celle sur la coquille cylindrique de rayon R et de longueur h d'où

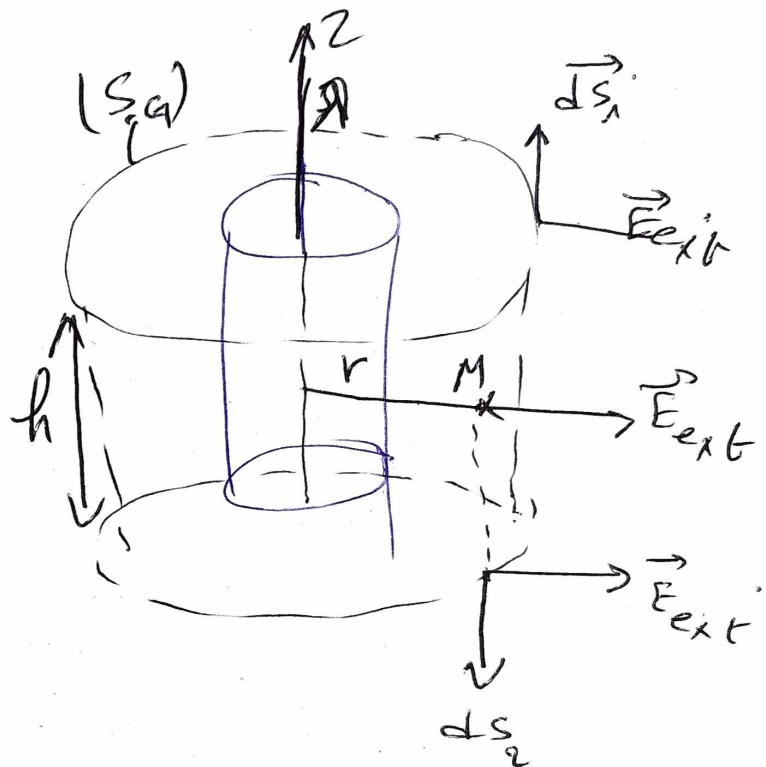
$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{fil}} + Q_{\text{cylindre}(R, h)} = \lambda h + \sigma 2\pi R h.$$

Donc:

$$E(r) = \frac{\lambda h + 2\pi\sigma R h}{2\pi\epsilon_0 r h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

ou bien:

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \sigma R \right) \frac{1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$



3) potentiel électrique

Le potentiel électrique : $\vec{E} = -\text{grad} V$

Pour $r < R$:

$$V(r) = \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} \\ = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

pour $r > R$:

$$V(r) = - \int \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \sigma R \right) \frac{1}{\epsilon_0 r} dr$$

$$= - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \sigma R \right) \int \frac{dr}{r} = - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \sigma R \right)$$

$$= - \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \sigma R \right) \ln r + C'$$

Exo 4 :

Le système :

1) $\vec{E} = \vec{E}_r = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r.

Théorème de Gauss $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oiint E ds = E \oiint ds = E S_G$$

$$S_G = 4\pi r^2$$

si $r < R_1$ $Q_{int} = 0$

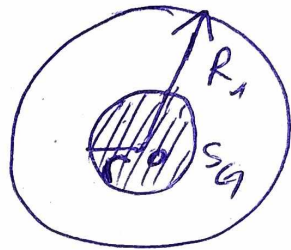
$$E_1 4\pi r^2 = 0 \rightarrow E_1 = 0 \rightarrow \vec{E}_1 = \vec{0}$$

$Q_{int} = +q$ si $R_1 < r < R_2$

~~$Q_{int} = +q$~~

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{+q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



si $r \geq R_2$

$$Q_{int} = +q + 2q = 3q$$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{3q}{\epsilon_0} \rightarrow E_3 = \frac{3q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \rightarrow \vec{E}_3 = \frac{3q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2) calcul de potentiel.

~~la~~

la région $r > R_2$.

$$V_3(r) = - \int \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = - \int E_r dr$$

$$V_3(r) = - \int \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

donc: $V_3(+\infty) = 0 + C \Rightarrow 0$

$$\boxed{V_3(r) = \frac{5q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$