Série de TD n°2 de Physique 2 (à traiter en 05 séances)

Champ Electrique

Exercice 1 :

Sur un axe $X'OX$, d'origine O, sont placées une charge ponctuelle positive $q_1 = +3q$ en O, et une charge ponctuelle négative $q_2 = -q$ en A, d'abscisse $x = a$ (avec $a > 0$) (voir Fig. 1).

Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(x)$ aux divers points de l'axe $X'OX$.

Exercice 2 :

Quelle est l'expression du champ électrostatique généré au centre O d'un carré de côté b qui porte les charges $q_1 = q$, $q_2 = 2q$, $q_3 = -4q$ et $q_4 = 2q$, placées dans cet ordre sur ses quatre coins (voir Fig. 2) ?

Exercice 3 :

Soient trois charges positives et égales $q_1 = q_2 = q_3 = q$, formant un triangle équilatéral de côté a (voir Fig. 3). Trouver l'expression du champ électrostatique généré au centre O de ce triangle (on note r la distance qui sépare chaque charge de O).

Exercice 4 :

Un fil rectiligne, assimilé à un segment de droite de longueur L porté par l'axe (OY), porte une charge répartie uniformément avec une densité linéique λ positive (voir Fig. 4).

1. Sachant que l'élément de longueur du du fil porte une charge élémentaire $dq = \lambda\, du$, donner l'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OX), tel que $OM = x > 0$.
2. En introduisant l'angle θ (voir figure), donner l'expression de $d\vec{E}(M)$ en fonction de λ, x, θ et $d\theta$.
3. Par intégration, déduire l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le fil au point M, en fonction de λ, x et α.
4. Déduire le champ électrique créé au point M par :
   - Le même fil mais porté par l'axe (OY').
   - Le semi-fil infini confondu avec l'axe (OY) des y positifs.
   - Le semi-fil infini confondu avec l'axe (OY) des y négatifs.
   - Le fil infini confondu avec l'axe $(Y'OY)$.

<u>Exercice 5 :</u>

On considère deux fils infiniment longs et minces :

- Le fil confondu avec l'axe $(X'OX)$ porte une densité linéique de charge $+\lambda$.
- Le fil confondu avec l'axe $(Y'OY)$ porte une densité linéique de charge -2λ.

Déterminer l'expression du champ électrique total $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge en un point $M(x, y)$ dans les quatre régions du plan délimitées par les fils :
a) $x > 0, y > 0$, b) $x < 0, y > 0$, c) $x < 0, y < 0$, d) $x > 0, y < 0$.

<u>Exercice 6</u> :

Soit un secteur circulaire de rayon R, de centre O, d'angle β et d'axe (OZ). Ce dernier porte une charge totale Q répartie uniformément sur sa surface avec une densité surfacique σ positive (voir Fig. 5).

1. Sachant que l'élément de surface ds du secteur porte une charge élémentaire $dq = \sigma\, ds = \sigma\, R\, d\rho\, d\theta$, donner l'expression de la composante dE_z, suivant l'axe (OZ), du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OZ), tel que $OM = z > 0$.
2. Donner l'expression de la composante dE_z, en fonction de σ, z, ρ, $d\phi$ et $d\theta$.
3. Par intégration, déduire l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le secteur au point M.
4. Déduire :

- L'expression du champ dE_z dans le cas d'un demi-disque de centre O et de rayon R.
- Le champ électrique créé par un disque de centre O et de rayon R.
- Le champ électrique créé par un plan infini confondu avec le plan (XOY).

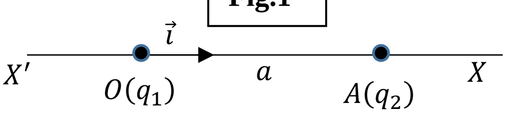


Fig.1

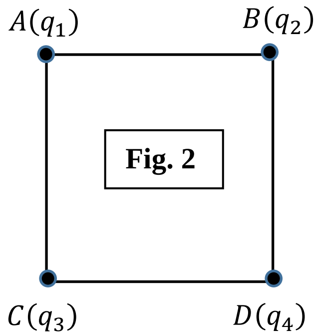


Fig. 2

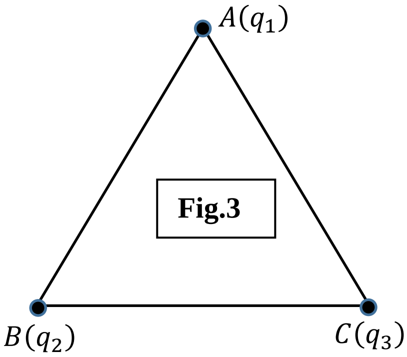


Fig.3

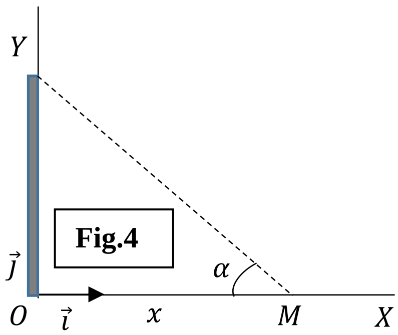


Fig.4

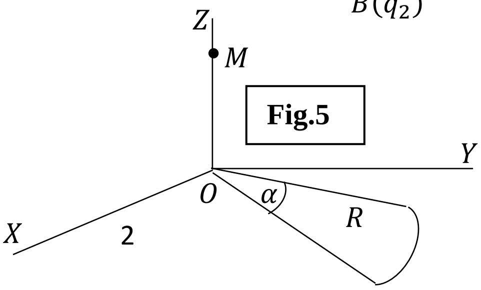


Fig.5

Exercices supplémentaires

Exercice S1 :

Quatre charges ponctuelles q_1 (négative), $q_2 = -2q_1, q_3 = -3q_1$ et $q_4 = +2q_1$ sont placées sur les quatre sommets d'un rectangles de longueur a et de largeur b (voir figure 1).

Calculer le champ électrique créé par cette distribution de charges au centre O du rectangle.

Exercice S2 :

Le système ci-contre représente un fil non conducteur constitué d'une partie rectiligne semi-infini AC, d'une partie AB de longueur L recourbée en un quart de cercle de centre O et de rayon R et enfin d'une partie rectiligne semi-infini BD (voir figure 2). Le fil porte une densité linéique de charge λ constante et positive.

1. Exprimer le champ électrique en O créé par la partie BD.
2. En déduire l'expression du champ électrique en O crée par la partie AC.
3. Exprimer le champ électrique en O créé par la partie AB.
4. En déduire le champ électrique total créé par tout le fil en O.

Exercice S3 :

Un anneau circulaire de centre O, de rayon R et d'axe (Oz) est uniformément chargé avec une densité linéique constante et positive λ (voir figure 3).

Calculer le champ électrique créé par cet anneau en un point M de l'axe (Oz), tel que $OM = z > 0$.

Exercice S4 :

Considérons un cylindre d'axe $Z'Z$ tel que l'origine O soit confondue avec son centre (voir figure 4). Ce cylindre est uniformément chargé sur sa surface latérale avec une densité superficielle uniforme $\sigma > 0$. Donner l'expression du champ électrostatique en un point M de l'axe du cylindre.

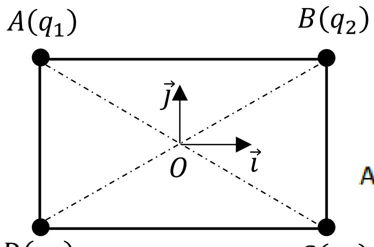


Figure 1

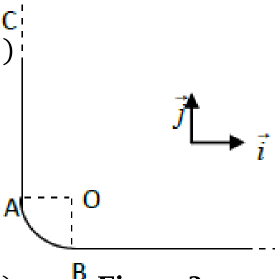


Figure 2

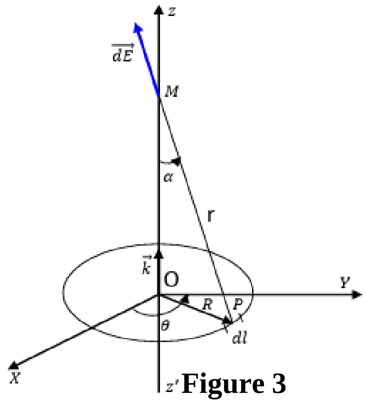


Figure 3

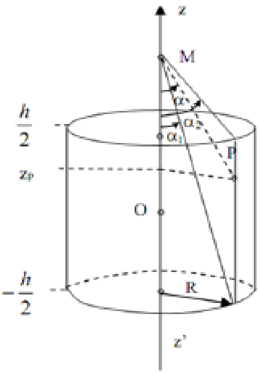


Figure 4

Corrigé de la série n°2 de Physique 2

Exercice 1 :

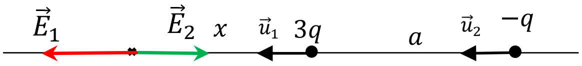
Déterminer l'expression du champ électrique $E(x)$ aux divers points de l'axe $X'OX$:

On considère que ce champ est créé en un point M, tel que $OM = x$.

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = K\frac{q_1}{(OM)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(AM)^2}\vec{u}_2$$

1ère région : $x < 0$

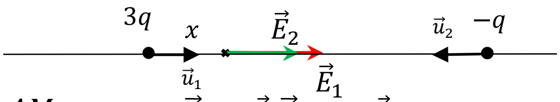


$$OM = -x, AM = -x + a \; puisque \; x < 0, \vec{u}_1 = -\vec{\imath}, \vec{u}_2 = -\vec{\imath}$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(-x+a)^2}\right)\vec{\imath}$$

$\vec{u}_1$

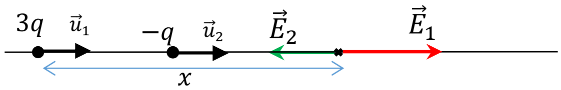
2ème région : $0 < x < a$



$$OM = x, AM = a - x, \vec{u}_1 = \vec{\imath}, \vec{u}_2 = -\vec{\imath}$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right)\vec{\imath}$$

3ème région : $x > a$

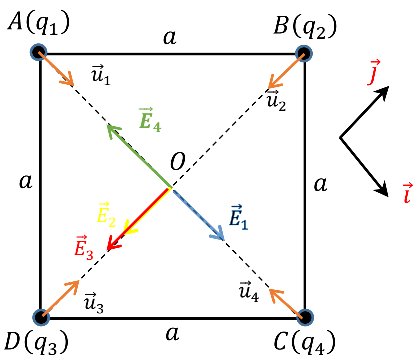


$$OM = x, AM = x - a, \vec{u}_1 = \vec{\imath}, \vec{u}_2 = \vec{\imath}$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\vec{\imath}$$

Exercice 2 :

L'expression du champ électrostatique généré au centre O du carré :
D'après le principe de superposition :



$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) + \vec{E}_3(0) + \vec{E}_4(0)$$

$$= K\frac{q_1}{(AO)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(BO)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(CO)^2}\vec{u}_3 + K\frac{q_1}{(DO)^2}\vec{u}_4$$

$$AO = BO = CO = DO = \frac{\sqrt{(AC)^2 + (CD)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{u}_1 = \vec{\imath}, \vec{u}_2 = -\vec{\jmath}, \vec{u}_3 = \vec{\jmath}, \vec{u}_4 = -\vec{\imath}$$

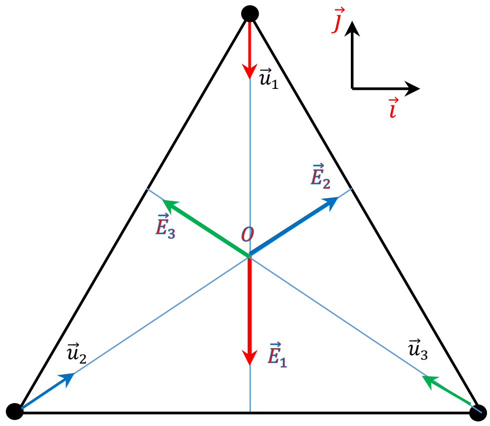
$$\vec{E}(O) = -2\frac{Kq}{b^2}(\vec{\imath} + 5\vec{\jmath})$$

Exercice 3 :

L'expression du champ électrostatique généré au centre O du triangle :

Pour trouver le centre d'un triangle équilatéral : on trace les trois médianes du triangle. Une médiane est une ligne qui relie un sommet à son point médian sur le côté opposé. Comme le triangle est équilatéral, les trois médianes se coupent en un seul point. La médiane forme un angle de 90° degré avec le côté opposé. La distance qui sépare les trois charges du centre est la même :

$$AO = BO = CO = r$$



Pour calculer cette distance, on procède comme suit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\left(a/2\right)}{r} \rightarrow r = \frac{a}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) + \vec{E}_3(0)$$
$$= K\frac{q_1}{(AO)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(BO)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(CO)^2}\vec{u}_3$$
$$= K\frac{q}{r^2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$$

La somme $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ donne un vecteur porté par l'axe(OY), tel que :

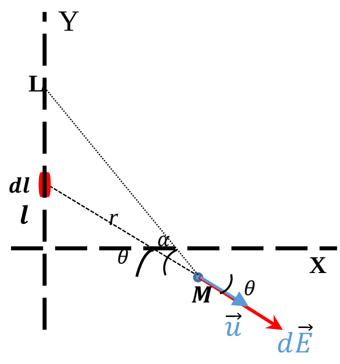
$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{\jmath}$$

Sachant que $\vec{u}_1 = -\vec{\jmath}$, il s'en suit que : $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$

Par conséquent :

$$\vec{E}(O) = (\vec{0})$$

Exercice 4 :



1. L'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OX), tel que $OM = x > 0$:

$$d\vec{E}(M) = K\frac{dq}{r^2}\vec{u} = K\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$

2. L'expression de $d\vec{E}(M)$ en fonction de λ, x, θ and $d\theta$:

D'après la figure :

$$\tan\theta = \frac{l}{x} \rightarrow l = x\tan\theta \rightarrow dl = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow r = \frac{x}{\cos\theta}$$

$$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Ce qui donne :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda}{x}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})d\theta$$

3. L'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le fil au point M :

$$\vec{E}_+(M) = \int_{fil} d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda}{x}\int_0^{\alpha}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})d\theta = \frac{K\lambda}{x}[\sin\alpha\,\vec{\imath} + (\cos\alpha - 1)\vec{\jmath}]$$

4. Déduire le champ électrique créé au point M par :

a. Le même fil mais porté par l'axe (OY') :

Dans ce cas, il y a une symétrie par rapport à l'axe $(X'OX)$. Il suffit de changer dans l'expression de $\vec{E}(M)$, le vecteur $\vec{\jmath}$ par $(-\vec{\jmath})$:

$$\vec{E}_-(M) = \frac{K\lambda}{x}[\sin\alpha\,\vec{\imath} - (\cos\alpha - 1)\vec{\jmath}]$$

b. Le semi-fil infini confondu avec l'axe (OY) des y positifs :

$$\vec{E}_{(OX)}(M) = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \vec{E}_+(M) = \frac{K\lambda}{x}[\vec{\imath} - \vec{\jmath}]$$

c. Le semi-fil infini confondu avec l'axe (OY') des y négatifs :

$$\vec{E}_{(OX')}(M) = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \vec{E}_-(M) = \frac{K\lambda}{x}[\vec{\imath} + \vec{\jmath}]$$

d. Le fil infini confondu avec l'axe $(Y'OY)$.

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}_{(X'OX)}(M) = \vec{E}_{(OX)}(M) + \vec{E}_{(OX')}(M) = 2\frac{K\lambda}{x}\vec{\imath}$$

<u>Exercice 5 :</u>

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{X'OX}(M) + \vec{E}_{Y'OY}(M)$$

Région 1 : $x > 0, y > 0$

$$\vec{E}(M) = -\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 2 : $x < 0, y > 0$

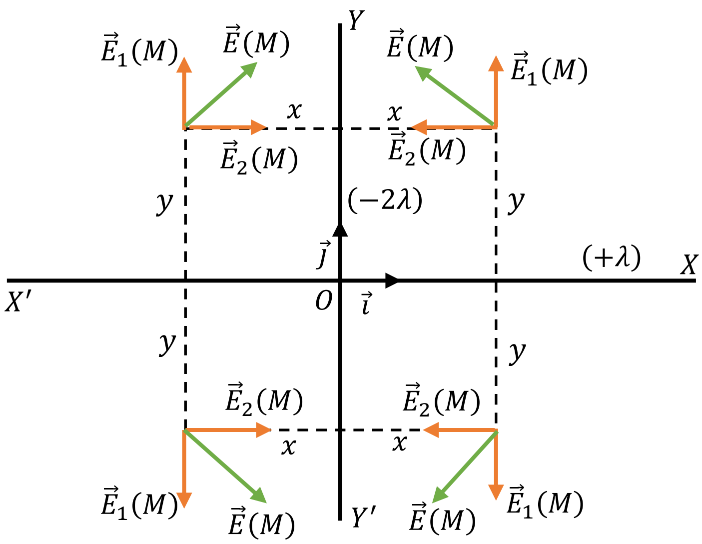
$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 3 : $x < 0, y < 0$

$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 4 : $x > 0, y < 0$

$$\vec{E}(M) = -\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$



Exercice 6 :

1. L'expression de la composante dE_z suivant l'axe (OZ) du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OZ), tel que $OM = z > 0$:

$$dE_z(M) = dE\cos\alpha = K\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\alpha = K\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r^2}\cos\alpha$$

2. L'expression de le composante dE_z en fonction de $\sigma, z, \rho, d\rho$ et $d\theta$:

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Ce qui donne :

$$dE_z(M) = K\frac{\sigma z\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. L'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le secteur au point M :

$$E_z(M) = \int_S dE_z(M) = K\sigma z\int_0^\beta d\theta\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z\beta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour calculer cette intégrale, on va utiliser le changement de variable suivant :

$$u = \rho^2 + z^2 \rightarrow du = 2\rho d\rho$$

$$\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\left(-u^{-\frac{3}{2}}\right)du = \left(-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_{z^2}^{R^2+z^2} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Par conséquent :

$$E_z(M) = \frac{\sigma\beta}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

4. Déduire :

a. L'expression du champ dE_z dans le cas d'un demi-disque de centre O et de rayon R :

$$\beta = \pi \rightarrow E_z(M) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

b. Le champ électrique crée par un disque de centre O et de rayon R :

L'axe (OZ) est un axe de symétrie du disque. Il est clair que le champ total créé par ce disque sera porté par l'axe (OZ) (vous pouvez le vérifier en prenant deux éléments de charges symétriques par rapport à l'axe). Par conséquent :

$$\vec{E}_{dis}(M) = E_z(M, \beta = 2\pi)\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{k}$$

c. Le champ électrique crée par un plan infini confondu avec le plan (XOY) :

$$\vec{E}_{plan}(M) = \lim_{R\to\infty}\vec{E}_{dis}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$