Série de TD n°5 (à traiter en 04 séances)

Théorème de Gauss

Exercice 01 :

Les composantes du champ électrique dans la figure ci-contre sont : $E_x = 800\,x, E_y = 0, E_z = 0$. Calculer le flux du champ électrique à travers la surface du cube de la figure 1 ainsi que la charge à l'intérieur de ce cube (a = 10 cm).

Exercice 02 :

En utilisant le théorème de GAUSS, retrouver le champ électrique créé par :

- Un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ confondu avec l'axe (Oz).
- Un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ confondu avec le plan (Oxy).

Exercice 03 :

On considère deux sphères (S_1) et (S_2) concentriques, creuses, de rayons R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$ et de charges totales $Q_1 = +Q$ et $Q_2 = -Q$, respectivement. Ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes (voir figure 2).

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace. Distinguer les trois régions :$r < R_1, R_1 < r < R_2, r > R_2$;

2. Trouver l'expression du potentiel $V(M)$, sachant que le potentiel est nul à l'infini.

Exercice 04 :

On considère une distribution de charge constituée par la réunion d'un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique λ > 0 coïncidant avec l'axe Oz, et d'un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R, portant une densité surfacique σ > 0 et constante (Figure 3). En appliquant le théorème de Gauss calculer : a) Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M à l'intérieur du cylindre b) Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M à l'extérieur du cylindre.

Exercice 05 :

Soit deux sphères concentriques, la première, de rayon intérieur R_1 et extérieure R_2 $(R_2 > R_1)$, est uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charges uniforme ρ positive. Cette dernière est entourée par une deuxième sphère creuse de rayon R_3 $(R_3 > R_2)$ qui est uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charges positive σ (voir Figure 4).

1. En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charges en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. Distinguer les régions : $r < R_1, R_1 < r < R_2, R_2 < r < R_3, r > R_3$.
2. Trouver le potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point M de l'espace, sachant que le potentiel est nul à l'infini.

Exercice 06 :

On considère deux cylindres infinis et coaxiaux. Le premier est uniformément chargé avec une densité volumique ρ positive, comprise entre son rayon intérieure R_1 et extérieure R_2. Le deuxième, de rayon R_3 $(R_3 > R_2 > R_1)$ est uniformément chargé en surface avec une densité surfacique positive σ (voir Figure 5).

1. En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. Distinguer les régions : $r < R_1, R_1 < r < R_2, R_2 < r < R_3, r > R_3$.
2. Trouver le potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point M de l'espace, sachant que $V(r = 0) = 0$.

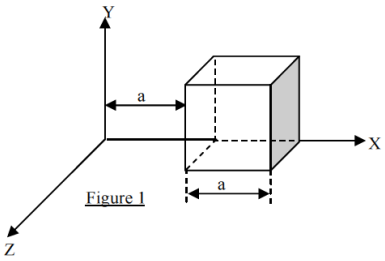


Figure 1

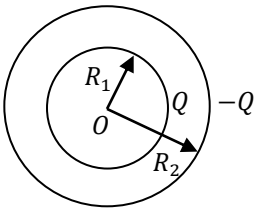


Figure 2

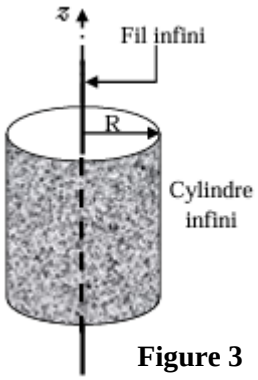


Figure 3 **Figure 3**

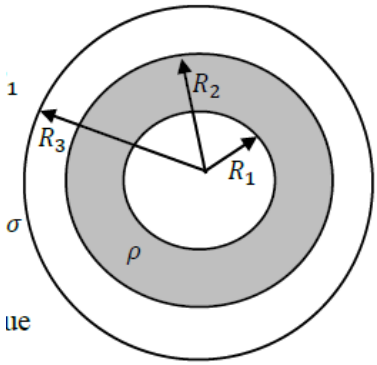


Figure 4

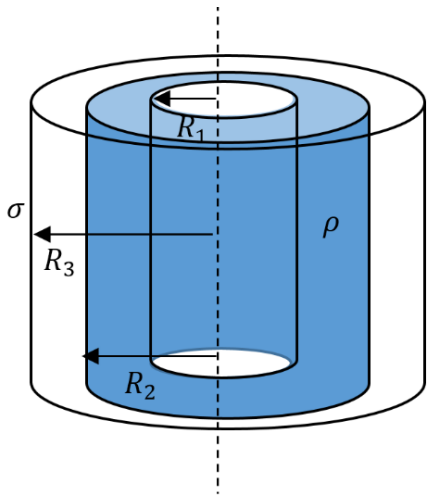
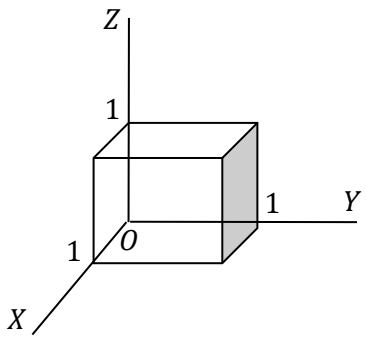


Figure 5

Exercices supplémentaires

Exercice S1 : Calculer le flux du champ électrique $\vec{E}(x,y,z) = (4xz)\vec{\imath} - (y^2)\vec{\jmath} + (yz)\vec{k}$ à travers la surface du cube limité par : $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ (Figure ci-contre). Déduire la charge électrique intérieure à ce cube.



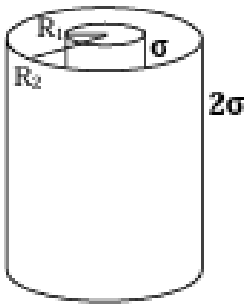
Exercice S2 : On considère une certaine distribution de charges à symétrie sphérique de centre *O*, telle que le potentiel électrique $V(M)$ qu'elle crée en un point *M* distant de *r* du point *O* soit de la forme :

$$V(M) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\left(\frac{r}{a}\right)}$$

Où A et a sont des constantes positives.

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ correspondant, en tout point M de l'espace (excepté *O*).
2. À partir de l'expression de ce champ sur une sphère de centre *O* et de rayon *r*, déterminer la charge interne $Q(r)$ contenue dans cette sphère. En déduire la charge totale de la distribution. Conclure.

Exercice S3 : Soit deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tel que $R_1 < R_2$ et de hauteur infinie. Le cylindre de rayon R_1 porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité $\sigma > 0$. Le deuxième cylindre de rayon R_2 porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité (2σ) (Figure ci-contre).



1. En utilisant le théorème de Gauss, trouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$ (distinguer les trois régions : $r < R_1, R_1 < r < R_2, r > R_2$).

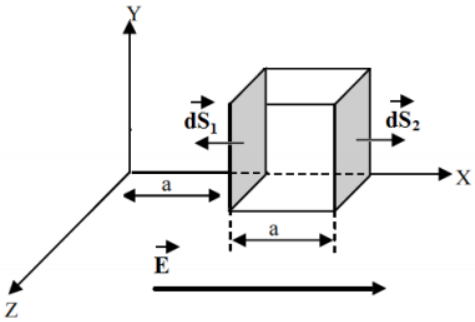
2. En déduire l'expression du potentiel électrique $V(M)$ en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. On prend $V(R_1) = \sigma R_1/\varepsilon_0 \ln R_1$.

Exercice 4 : On considère une distribution de charge volumique uniforme de densité ρ, répartie dans une région de l'espace comprise entre deux plans parallèles, infinis, situés respectivement aux positions $z = -d/2$ et $z = +d/2$. La distribution de charge est donc homogène dans l'intervalle $-d/2 \le z \le +d/2$ et nulle ailleurs. En utilisant le théorème de Gauss, déterminez l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace : distinguer les régions : $z < -d/2, -d/2 < z < +d/2, z > d/2$.

Corrigé de la série de TD n°5

Exercice 1 :

Le champs est parallèle à l'axe OX donc son flux a travers le cube se réduit aux flux a travers les deux faces perpendiculaires a l'axe OX (en gris sur la figure)



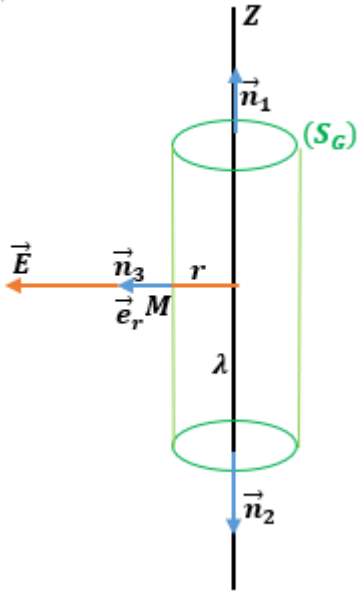
$$\varphi_E = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \int \vec{E}\,\overrightarrow{dS_1} + \int \vec{E}\,\overrightarrow{dS_2} = -ES_1 + ES_2$$
$$= -800\sqrt{0{,}1}\ (0{,}1)^2 + 800\sqrt{0{,}2}\ (0{,}1)^2$$
$$= -2{,}53 + 3{,}58 = 1{,}05\ \left[\frac{N}{C}\,m^2\right]$$
$$\varphi_E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = \varphi_E.\varepsilon_0$$
$$\Rightarrow Q_{int} = 1{,}05\,.8{,}85\,.10^{-12} = 9{,}3\,.10^{-12}\ C$$

Exercice 2 :

En utilisant le théorème de GAUSS, retrouvons le champ électrique créé, en un point M de l'espace, par :

- Un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ porté par l'axe (Oz) :

Symétrie cylindrique : le champ électrique est radiale (perpendiculaire à l'axe (Oz)) $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$



Surface de Gauss ; cylindre de rayon r, d'axe (Oz) et de hauteur h

Calcul du flux : la surface d'un cylindre est constituée de trois surfaces ; 02 surfaces de bases $(S_1\ et\ S_2)$ et une surface latérale (S_3). Donc, il y aura trois flux :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$
$$= \iint_{(S_1)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \iint_{(S_2)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \iint_{(S_3)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$$
$$= \iint_{(S_1)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_3)$$
$$= \iint_{(S_1)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_3)$$

$$\iint_{(S_3)} EdS \ \ (\vec{e}_r \perp \vec{n}_{1,2})$$

Par ailleurs, le champ est constant sur la surface latérale :

$$\Phi = E \iint_{(S_3)} dS = ES_3 = E(2\pi rh)$$

Charge intérieure à la surface de Gauss : $Q_{int} = \lambda h$

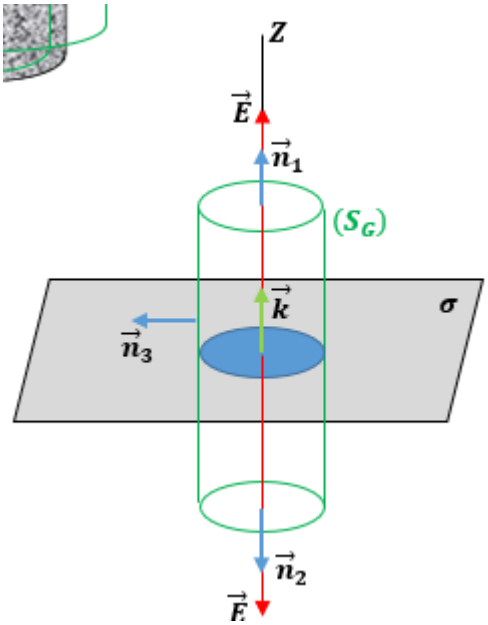
Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)(2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- Un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$, confondu avec la plan (Oxy) :

Symétrie plane : le champ électrique est perpendiculaire eu plan et ne dépend pas des coordonnées de ce plan $\vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$

Surface de Gauss ; cylindre de rayon r, d'axe (Oz) et de hauteur h, tels que la surface de la première base (S_1) se trouve en $z = +h/2$ et la surface de la seconde base (S_2) se trouve en $z = -h/2$



Calcul du flux : la surface d'un cylindre est constituée de trois surfaces ; 02 surfaces de bases $(S_1 \ et \ S_2)$ et une surface latérale (S_3). Donc, il y aura trois flux :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$= \iint_{(S_1)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \iint_{(S_2)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}$$

$$+ \iint_{(S_3)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_3)$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_3)$$

$$\iint_{(S_1)} EdS + \iint_{(S_2)} EdS \ \ (\vec{e}_r \perp \vec{n}_3)$$

Par ailleurs, le champ est constant sur les surfaces des bases :

$$\Phi = E \iint_{(S_1)} dS + E \iint_{(S_2)} dS = ES_1 + ES_1 = 2ES \ (S_1 = S_2 = S)$$

Charge intérieure à la surface de Gauss : $Q_{int} = \sigma S$

Théorème de Gauss :

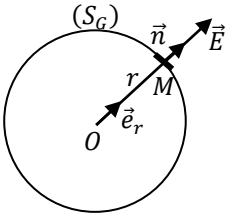
$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 3 :

1. Le champ électrique$\vec{E}$ en tout point de l'espace :

La distribution de charges présente une symétrie sphérique, le champ est radial :$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon $r = OM$



Calcul du flux :$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = ES_G = E(4\pi r^2)$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Charge intérieure et champ :

$$r < R_1 : Q_{int} = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 : Q_{int} = Q \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$r > R_2 : \ Q_{int} = Q - Q = 0 \Rightarrow E_3 = 0$$

2. Le potentiel électrostatique :

$$pour\ r < R_1$$

$$dV_1(r) = -\vec{E}_1.d\vec{r} = E_1.dr$$
$$V_1(r) = -\int E_1.dr = C_1$$
$$pour R_1 < r < R_2$$

$$dV_2(r) = -\vec{E}_2.d\vec{r} = E_2.dr$$
$$V_2(r) = -\int E_2.dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$$

$$pour\ r > R_2$$
$$dV_3(r) = -\vec{E}_3.d\vec{r} = E_3.dr$$
$$V_3(r) = -\int E_3.dr = C_3$$

Détermination des constantes :
Le potentiel est nul à l'infini :

$$\lim_{r\to\infty} V_3(r) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

La continuité du potentiel en r=R_2 implique :

$$V_3(\mathrm{R}_2) = V_2(\mathrm{R}_2) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}_2} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}_2}$$

La continuité du potentiel en r=R_1 implique :

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Les expressions du potentiel :

Pour r < R_1 : $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Pour R_1<r < R_2 $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$

Pour r > R_2 $V(r) = 0$

Exercice 4 :

Symétrie cylindrique : le champ électrique est radiale (perpendiculaire à l'axe (Oz)) $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Surface de Gauss ; cylindre de rayon r, d'axe (Oz) et de hauteur h

Calcul du flux : la surface d'un cylindre est constituée de trois surfaces ; 02 surfaces de bases (S_1 et S_2) et une surface latérale (S_3). Donc, il y aura trois flux :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_{(S_1)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \iint_{(S_2)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \iint_{(S_3)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_3)$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_3)$$

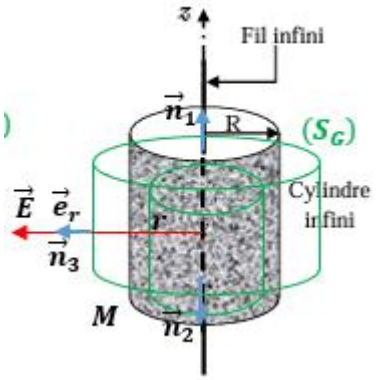
$$\iint_{(S_3)} EdS \ \left(\vec{e}_r \perp \vec{n}_{1,2}\right)$$

Par ailleurs, le champ est constant sur la surface latérale :

$$\Phi = E \iint_{(S_3)} dS = ES_3 = E(2\pi rh)$$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)(2\pi rh) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$



Si $r < R$: $Q_{int} = \lambda h$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Si $r > R$: $Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi Rh$

$$E(r) = \frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercice 05 :

Le théorème de Gauss énonce que :

$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En raison de la symétrie sphérique de la distribution, le champ est radial (Le champ est porté par la droite (OM)) :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss, la surface S d'une sphère imaginaire de centre O et de rayon $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Considérons une surface élémentaire dS centré en M. Le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est perpendiculaire à **la** tangente en M et se dirige vers l'extérieur de la surface de Gauss.

$$\overrightarrow{dS} = dS.\vec{e}_r$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss est donc:

$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \oiint E_r.dS = E_r \oiint dS = E_r.4\pi r^2$$

La loi de Gauss nous donne le champ radial :

$$E_r = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

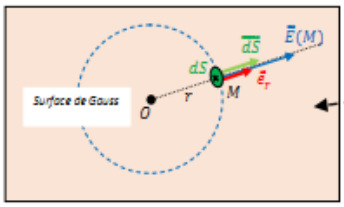
La charge à l'intérieur de la surface de Gauss dépend de la position du point M dans l'espace. D'après la distribution de charges, on distingue 4 régions :

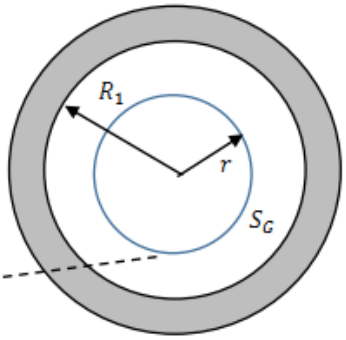
Région 1 ($r < R_1$)

$$q_{int} = 0$$

Le champ créé dans cette région est :

$$E_r = 0$$





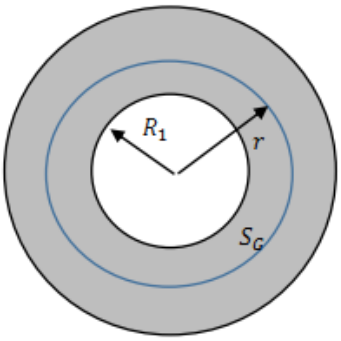
Région 2 ($R_1 < r < R_2$)

$$q_{int} = \rho(V_G - V_1) = \frac{4\pi}{3}\rho(r^3 - R_1^3)$$

On obtient le champ suivant :

$$E_r = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

$$\vec{E}_2(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$$



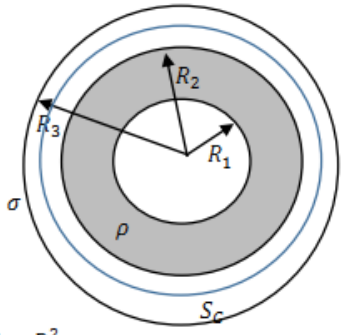
Région 3 $(R_2 < r < R_3)$

$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1) = \frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

Le champ sera donné par:

$$E_r = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_3(M) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



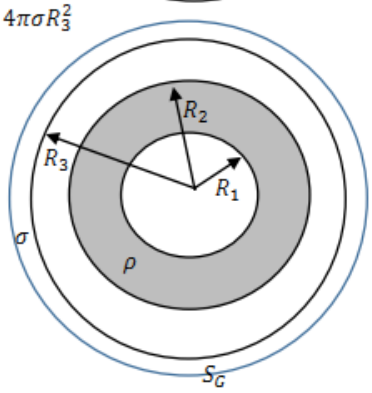
Région 4 $(r > R_3)$

$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1) + \sigma S_3 = \frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3 - R_1^3) + 4\pi\sigma R_3^2$$

Le champ sera donné par:

$$E_r = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_4(M) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



2. Calcul du potentiel

- **région 4 $(r > R_3)$**

En coordonnées sphériques, le potentiel est donné par:

$$V_4(r) = -\int \vec{E}_4.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_4(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_4(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r} + C$$

On a :

$$V_4(+\infty) = 0 + C = 0$$

On trouve :

$$V_4(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r}$$

- **région 3 $(R_2 < r < R_3)$**

$$V_3(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_3(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r} + C$$

La continuité de potentiel $V_3(r = R_3) = V_4(r = R_3)$

$$\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_3} + C = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 R_3}$$

$$C = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

- **région 2 ($R_1 < r < R_2$)**

$$V_2(r) = -\int \vec{E}_2 . \overrightarrow{dl}$$

$$V_2(r) = -\int \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} . dr$$

$$V_2(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(-\int r . dr + \int \frac{R_1^3}{r^2} . dr\right)$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + C$$

La continuité de potentiel $V_2(r = R_2) = V_3(r = R_2)$

$$-\frac{\rho R_2^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{R_2} + C = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_2(r) = \frac{\rho(3R_2^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

- **région 1 ($r < R_1$)**

$$V_1(r) = -\int \vec{E}_1 . \overrightarrow{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_1(r) = C$$

La continuité de potentiel $V_1(r = R_1) = V_2(r = R_1)$

$$C = \frac{\rho(3R_2^2 - R_1^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{R_1} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_1(r) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

Exercice 06 :

Le théorème de Gauss énonce que :

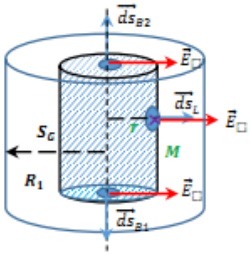
$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En raison de la symétrie cylindrique de la distribution, le champ est radial (Le champ est porté par la droite (OM)) :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss, la surface S d'un cylindre imaginaire de rayon $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et de hauteur h.

Le flux du champ à travers la surface de Gauss est donc:



$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B1} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B2} + \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = E_r.4\pi r^2$$

$\iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B1} = \iint_{S_{B2}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B2} = 0$ piusque $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{B1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{B2}$

$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = \iint_{S_{B1}} E\,dS_L$ puisque $\vec{E} \,//\, \overrightarrow{dS}_L$.

Sur la surface latérale du cylindre $r = cst$ donc le champ E est constant

$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = \iint_{S_{B1}} E\,dS_L = E\iint_{S_{B1}} dS_L = ES_L$ (S_L la surface latérale du cylindre) ; $S_L = 4\pi rh$ (h la hauteur du cylindre de gauss)

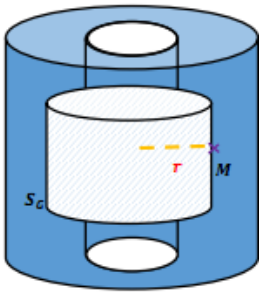
$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = ES_L = E4\pi rh$$

1- **Région *I* : Si $r < R_1$**

$$\oiint \vec{E}_I(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_I S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{int} = 0$$
$$E_I = 0$$

2- **Région *II* : Si $R_1 \leq r < R_2$**



$$E_{II}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$

q_{int} est la charge comprise dans la couche entre le cylindre de Gauss et le cylindre de rayon R_1

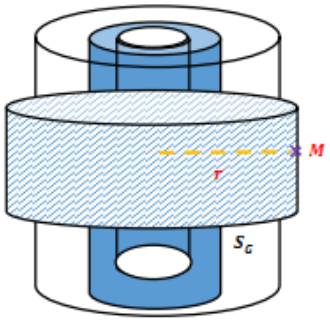
$$q_{int} = \rho(V_G - V_1)$$

V_G Le volume du cylindre de Gauss
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$E_{II}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{II} = \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$

$$E_{IV}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$



q_{int} est la charge $q_1$comprise dans la couche entre le cylindre de rayon R_2et le cylindre de rayon R_1plus la charge $q_2$qui se trouve sur le cylindre de rayon R_3

$$q_{int} = q_1 + q_2$$

$$q_1 = \rho(V_2 - V_1)$$

V_2 Le volume du cylindre de de rayon R_2
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_1 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$q_2 = \sigma S_3$$

S_3 La surface latérale du cylindre de rayon R_3

$$q_2 = \sigma S_3 = 2\pi\sigma R_3 h$$
$$q_{int} = q_1 + q_2 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h$$

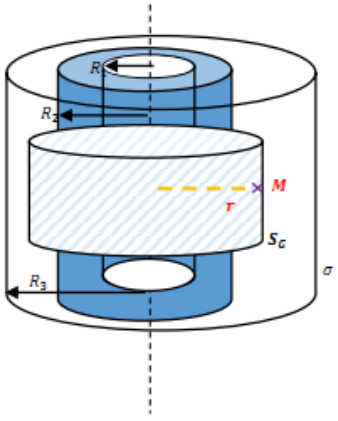
$$E_{IV}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{IV} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_{IV}(M) = \left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r$$

$$\vec{E}_{II}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_r$$

3- Région *III* :Si $R_2 \leq r < R_3$

$$E_{III}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$



q_{int} est la charge comprise dans la couche entre le cylindre de rayon R_2et le cylindre de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1)$$

V_2 Le volume du cylindre de de rayon R_2
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

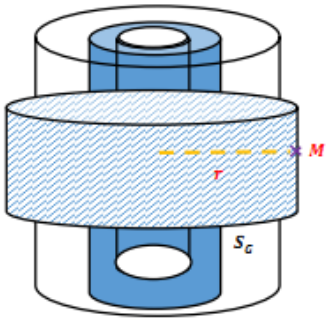
$$q_{int} = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$E_{II}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{II} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_{III}(M) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

4- Région *IV*: Si $r \geq R_3$

$$E_{IV}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$



q_{int} est la charge $q_1$comprise dans la couche entre le cylindre de rayon R_2et le cylindre de rayon R_1plus la charge $q_2$qui se trouve sur le cylindre de rayon R_3

$$q_{int} = q_1 + q_2$$

$$q_1 = \rho(V_2 - V_1)$$

V_2 Le volume du cylindre de de rayon R_2
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_1 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$q_2 = \sigma S_3$$

S_3 La surface latérale du cylindre de rayon R_3

$$q_2 = \sigma S_3 = 2\pi\sigma R_3 h$$

$$q_{int} = q_1 + q_2 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h$$

$$E_{IV}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{IV} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_{IV}(M) = \left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r$$

2. Calcul du potentiel

- **région *I* ($r < R_1$)**

En coordonnées cylindriques, le potentiel est donné par:

$$V_I(r) = -\int \vec{E}_I.\overrightarrow{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_I(r) = C$$

On a :

$$V_I(r = 0) = 0 \rightarrow C = 0$$

On trouve :

$$V_I(r) = 0$$

- **région *II* ($R_1 \leq r < R_2$)**

$$V_{II}(r) = -\int \vec{E}_{II}.\overrightarrow{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_{II}(r) = -\int \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{II}(r = R_1) = V_I(r = R_1)$

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R_1^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln(R_1) + C = 0$$

$$C = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}R_1^2 - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln(R_1)$$

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln(r) + \frac{\rho}{4\varepsilon_0}R_1^2 - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln(R_1)$$

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(r^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

- **région *III* $(R_2 \leq r < R_3)$**

$$V_{III}(r) = -\int \vec{E}_{III}.\overrightarrow{dl}$$

$$V_{III}(r) = -\int \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}.dr$$

$$V_{III}(r) = -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{II}(r = R_2) = V_{III}(r = R_2)$

$$-\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(R_2) + C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(R_2)$$

$$C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

$$V_{III}(r) = -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(r) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

- **région *IV* $(r \geq R_3)$**

$$V_{IV}(r) = -\int \vec{E}_{IV}.\overrightarrow{dl} = -\int E_r dr$$

$$V_{IV}(r) = -\int \left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}\right).dr$$

$$V_{IV}(r) = -\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{IV}(r = R_3) = V_{III}(r = R_3)$

$$-\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(R_3) + C$$
$$= -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

$$C = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

$$V_{IV}(r) = -\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(r) + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$
$$+ \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$