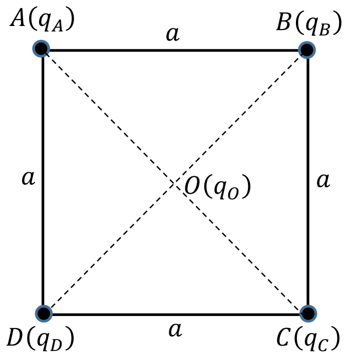
Série de TD n°3 de Physique 2 (à traiter en 04 séances)

Potentiel et énergie électrostatiques

Exercice 1 :

Quatre charges ponctuelles $q_A = 2q_B = -q_C = -2q_D = 2q\ (q > 0)$ sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de coté a. Une cinquième charge $q_0 > 0$ est maintenu fixe au centre O du carré (figure ci-contre).



1. Donner l'expression du potentiel résultant $V(O)$ au point O ;
2. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $E_p(O)$ de la charge q_0 ?
3. Calculer l'énergie interne U du système de charges (q_A, q_B, q_C, q_D).

Exercice 2 :

Trois charges $q_1 = q_2 = -q$ et $q_3 = q$ (q est une charge positive) sont placées dans le plan (OXY) suivant les coordonnées respectives : $A_1(-a,0)$, $A_2(0,0)$, $A_3(a,0)$.

1. Calculer le potentiel électrique $V(M)$ crée par ces charges au point $M(0, y)$, tel que $y > 0$. En déduire le champ électrique total $\vec{E}(M)$ en ce point.
2. Calculer l'énergie potentielle interne U du système composé de ces trois charges.
3. Calculer l'énergie potentielle électrique $E_p(M)$ d'une charge q posée en M (on prend $y = a$).

A.N : a=6 cm ; q= 8×10^{-10} C

Exercice 3 :

1. Trouver l'expression du champ $\vec{E}(x, y)$ électrique qui dérive du potentiel électrique suivant :

$$V(x, y) = x(y^2 - 4x^2)$$

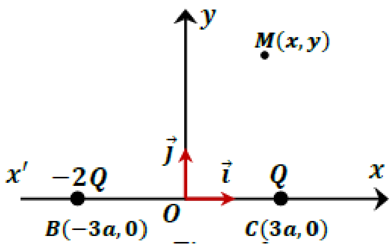
2. Trouver le potentiel électrique $V(x, y)$ associé au champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x, y) = a(y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})\ ;\ V(1,1) = 0$$

Exercice 4 :

Deux charges ponctuelles $-2Q$ et Q sont placées aux points $B(-3a,0)$ et $C(+3a,0)$ (Figure ci-contre).

1. Calculer le potentiel $V(M)$ en un point $M(x,y)$ dans le plan (OXY).
2. Montrer que la surface équipotentielle dans ce plan est un cercle.



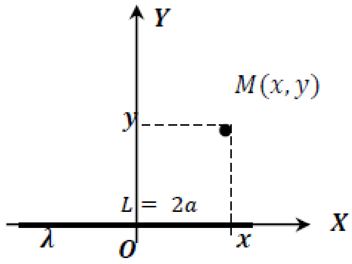
Exercice 5 :

Considérons un segment de droite de longueur L=2a chargée uniformément avec une densité linéique λ positive (Figure ci-contre).

Trouver le potentiel électrique $V(M)$ produit par cette distribution au point $M(x,y)$.

On donne :

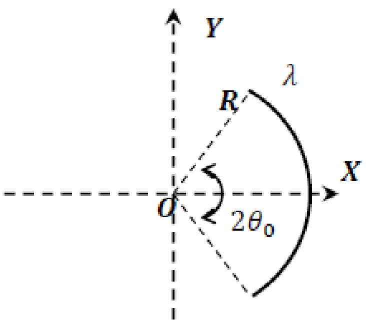
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{x^2+u^2}\right)$$



Exercice 6 :

Une tige ayant la forme d'un arc de cercle de rayon R est contenue dans le plan (XOY) comme le montre la figure ci-contre. La densité de charge de la tige en fonction de θ est donnée par la relation λ=λ_0.cos(θ) tel que λ_0 est une constante. La coordonnée θ est l'angle polaire (défini par rapport à l'axe OX), et 2θ_0 est l'angle formé par la tige est centré sur l'axe OX.

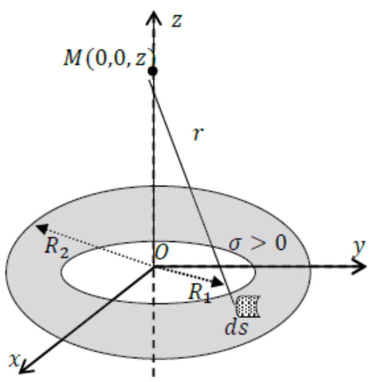
1. Montrer que la densité de charge λ est symétrique par rapport à l'axe OX.
2. Trouver e potentiel électrique $V(O)$ crée par cette distribution au point O.



Exercice 7 :

On considère un disque de centre O et de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2. Ce disque est uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (Figure ci-contre).

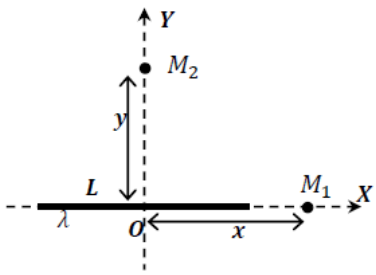
1. Trouver, par un calcul direct, le potentiel $V(M)$ créé par ce disque en un point M de son axe $Z'OZ$, tel que $OM = z > 0$.
   -Déduire le champ électrique au point M.
2. Déduire le potentiel électrostatique d'un disque plein.
3. Si le disque avec la figure ci-contre est chargé avec une densité non uniforme $\sigma = \rho_0 r$, où ρ_0 est une constante et r la distance par rapport au centre O, calculer le potentiel électrostatique $V(O)$ créé par la distribution au point O.



<u>Exercice supplémentaires</u>

<u>Exercice S1 :</u>

Considérons un segment de droite de longueur L chargée uniformément avec une densité linéique ($\lambda > 0$) (Figure ci-contre)



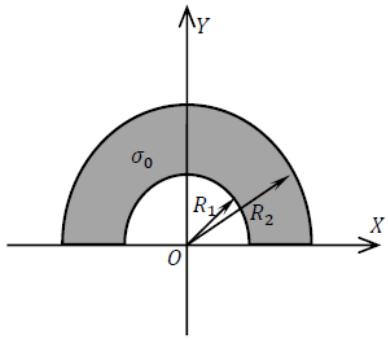
1. Calculer le potentiel crée au point M_1 (on prend $V = 0$ à l'infini).
2. En déduire le champ électrique $\vec{E}(M_1)$ au point M_1. Que devient ce champ lorsque $x \gg L$.
3. Calculez le potentiel au point M_2.

On donne :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + c^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)$$

<u>Exercice S2 :</u>

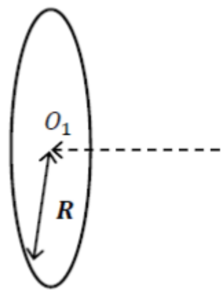
Une distribution surfacique de charge uniforme de densité σ_0 ayant la forme d'un demi-disque de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 est placée dans le plan (OXY) (figure ci-contre).



1. Trouver le potentiel électrostatique $V(O)$ crée par cette distribution au point $O(0,0)$.
2. Soit un disque complet de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 centré en $O(0,0)$ et portant une distribution surfacique $\sigma = \sigma_0|y|/y$. Déduire de la question 1 le potentiel électrostatique $V(O)$ crée par ce disque en son centre $O(0,0)$.

<u>Exercice S3 :</u>

Soit un fil circulaire de centre O et de rayon R chargé positivement avec une densité uniforme λ (Figure ci-contre).



1. Calculer le potentiel électrique $V(O)$ crée par cette distribution au centre O du cercle.
2. Calculer le potentiel crée en un point M situé sur l'axe du cercle perpendiculaire à son plan et ayant une distance z par rapport à O. (On prend $V = 0$ à l'infini).

Corrigé de la série de TD n°3 de Physique 2

Exercice 1 :

1. L'expression du potentiel résultant $V(O)$ au point O :

Principe de superposition :

$$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O) = K\frac{q_A}{AO} + K\frac{q_B}{BO} + K\frac{q_C}{CO} + K\frac{q_D}{DO}$$

D'après la figure :

$$AO = BO = CO = DO = r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Ce qui donne :

$$V(O) = 0$$

2. L'expression de l'énergie potentielle électrostatique $E_p(O)$ de la charge q_0 :

$$E_p(O) = q_O V(O) = 0$$

3. L'énergie interne U du système de charges (q_A, q_B, q_C, q_D) :

$$U = K\frac{q_A q_B}{AB} + K\frac{q_A q_C}{AC} + K\frac{q_A q_D}{AD} + K\frac{q_B q_C}{BC} + K\frac{q_B q_D}{BD} + K\frac{q_C q_D}{CD}$$

D'après la figure :

$$AB = BC = CD = AD = a \ ; \ AC = BD = \sqrt{2}a$$

Ce qui donne :

$$U = \left(\frac{2 - 5\sqrt{2}}{4}\right)\frac{Kq^2}{a}$$

Exercice 2 :

1. Le potentiel électrique $V(M)$ crée par ces charges au point $M(0, y)$, tel que $y > 0$.

Principe de superposition :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) + V_3(M) = K\frac{q_1}{A_1M} + K\frac{q_2}{A_2M} + K\frac{q_3}{A_3M}$$

D'après la figure :

$$A_1M = A_1M = \sqrt{a^2 + y^2}\ ;\ A_2M = y$$

Ce qui donne :

$$V(M) = -\frac{Kq}{y}$$

En déduire le champ électrique total $\vec{E}(M)$ en ce point :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} = -\frac{Kq}{y^2}\vec{j}$$

2. L'énergie potentielle interne U du système composé de ces trois charges :

$$U = K\frac{q_1q_2}{A_1A_2} + K\frac{q_1q_3}{A_1A_3} + K\frac{q_3q_2}{A_2A_3}$$

D'après la figure :

$$A_1A_2 = A_2A_3 = a\ ;\ A_2A_3 = 2a$$

Ce qui donne :

$$U = -K\frac{q^2}{2a} = -4.8\ 10^{-8}\,J$$

3. L'énergie potentielle électrique $E_p(M)$ d'une charge q posée en M (on prend $y = a$) :

$$E_p(M) = q_MV(M) = -\frac{Kq^2}{y} = -\frac{Kq^2}{a} = -9.6\ 10^{-8}J$$

<u>Exercice 3 :</u>

1. L'expression du champ $\vec{E}(x,y)$ électrique qui dérive du potentiel électrique suivant :

$$V(x,y) = x(y^2 - 4x^2)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} = -(y^2 - 12x^2)\vec{\imath} - 2xy\vec{\jmath}$$

2. Le potentiel électrique $V(x,y)$ associé au champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x,y) = a(y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})\ ;\ V(1,1) = 0$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = ay \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} = ax \end{cases}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = ay \rightarrow V(x,y) = -axy + f(y)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = ax \to \frac{\partial}{\partial y}[-axy + f(y)] = -ax + f'(y) = -ax \to f'(y) = 0 \to f(y) = C$$

Donc :

$$V(x,y) = -axy + C$$

En utilisant la condition au limites :

$$V(1,1) = -a + C = 0 \to C = a$$

Ce qui donne finalement :

$$V(x,y) = -axy + a = a(1 - xy)$$

<u>Exercice 4 :</u>

1. Le potentiel $V(M)$ en un point $M(x,y)$ dans le plan (OXY) :

Principe de superposition :

$$V(M) = V_B(M) + V_C(M) = K\frac{q_B}{BM} + K\frac{q_C}{CM}$$

D'après la figure :

$$BM = \sqrt{(x+3a)^2 + y^2}\ ; CM = \sqrt{(x-3a)^2 + y^2}$$

Ce qui donne :

$$V(M) = KQ\left[\frac{-2}{\sqrt{(x+3a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3a)^2 + y^2}}\right]$$

2. Montrons que la surface équipotentielle dans ce plan est un cercle :

$$V(M = V_0 = cste \to KQ\left[\frac{-2}{\sqrt{(x+3a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3a)^2 + y^2}}\right] = V_0$$

Cependant, on nous demande de trouver une surface équipotentielle, on prend, par exemple, $V_0 = 0$:

$$\frac{-2}{\sqrt{(x+3a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3a)^2 + y^2}} = 0 \to \frac{2}{\sqrt{(x+3a)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-3a)^2 + y^2}}$$

On élève les deux cotés au carré et après quelques manipulations, on trouve :

$$x^2 + 10ax + y^2 + 9a^2 = 0$$

Qui peut également s'écrire sous la forme :

$$(x+5a)^2 - 25a^2 + y^2 + 9a^2 = 0 \rightarrow (x+5a)^2 + y^2 = 16a^2$$

On obtient donc un cercle de centre $(-5a, 0)$ et de rayon $R = 4a$.

Exercice 5 :

1. Le potentiel électrique $V(M)$ produit par cette distribution au point $M(x, y)$:

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de longueur dl du fil et situé au point $P(x', 0)$ va créer au point $M(x, y)$ un potentiel élémentaire :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\lambda dl}{r}$$

D'après la figure :

$$dl = dx'$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + y^2}$$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{K\lambda dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur du segment :

$$V(M) = K\lambda \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$$

Pour calculer cette intégrale, effectuons le changement de variable suivant :

$$u = x - x' \rightarrow du = -dx'$$

Ce qui donne :

$$V(M) = -K\lambda \int_{x+a}^{x-a} \frac{dx'}{\sqrt{u^2 + y^2}} = K\lambda \int_{x-a}^{x+a} \frac{dx'}{\sqrt{u^2 + y^2}}$$

Cette intégrale est connue :

$$V(M) = K\lambda \left[\ln u + \sqrt{u^2 + y^2}\right]_{x-a}^{x+a} = K\lambda \ln\left(\frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)$$

Exercice 6 :

Une tige ayant la forme d'un arc de cercle de rayon R est contenue dans le plan (XOY) comme le montre la figure ci-contre. La densité de charge de la tige en fonction de θ est donnée par la relation $\lambda=\lambda_0.\cos(\theta)$ tel que λ_0 est une constante. La coordonnée θ est l'angle polaire (défini par rapport à l'axe OX), et $2\theta_0$ est l'angle formé par la tige est centré sur l'axe OX.

1. Montrons que la densité de charge λ est symétrique par rapport à l'axe OX :

$$\lambda(-\theta) = \lambda_0 \cos(-\theta) = \lambda_0 \cos(\theta) = \lambda(-\theta)$$

2. Le potentiel électrostatique $V(O)$ crée par cette distribution au point O :

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de longueur dl du fil va créer au point O un potentiel élémentaire :

$$dV(O) = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\lambda dl}{r}$$

D'après la figure :

$$dl = Rd\theta$$

$$r = R$$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{K\lambda Rd\theta}{R} = K\lambda d\theta = K\lambda_0 \cos(\theta)$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur de la tige :

$$V(M) = K\lambda_0 \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta \, d\theta = 2K\lambda_0 \sin\theta_0$$

<u>Exercice 7 :</u>

On considère un disque de centre O et de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2. Ce disque est uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (Figure ci-contre).

1. le potentiel $V(M)$ créé par ce disque en un point M de son axe $Z'OZ$, tel que $OM = z > 0$. Déduire le champ électrique au point M :

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de surface ds du disque va créer au point M un potentiel élémentaire :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\sigma dS}{r}$$

D'après la figure :

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{K\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur de la tige :

$$V(M) = K\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Cette intégrale se calcule en utilisant le changement de variable $u = r^2 + z^2$, ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2}\right]$$

Déduire le champ électrique au point M :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

2. Déduire le potentiel électrostatique d'un disque plein :

$$R_1 = 0 \rightarrow V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - z\right]$$

3. Si le disque avec la figure ci-contre est chargé avec une densité non uniforme $\sigma = \rho_0\rho$, où ρ_0 est une constante et ρ la distance par rapport au centre O, le potentiel électrostatique $V(O)$ créé par la distribution au point O :

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de surface ds du disque va créer au point M un potentiel élémentaire :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\sigma dS}{r}$$

D'après la figure :

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

$$r = \rho$$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{K\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = K\rho_0\rho d\rho d\theta$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur de la tige :

$$V(M) = K\rho_0\int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$