Série de TD n°2 (À traiter en deux séances et demie)

Exercice 1 :

Deux charges ponctuelles $3q$ et $-q$ $(q>0)$ sont placées, respectivement à l'origine O d'un axe $x'Ox$ et au point A d'abscisse $x = a$ $(a>0)$.

1. Déterminer le champ électrique dans les trois régions : $x>a, 0<x<a$ et $x<0$.
2. En quel point sur l'axe $x'Ox$ peut-on placer une charge q' pour qu'elle soit en équilibre.

Exercice 2 :

Un fil de longueur L placé suivant l'axe *Oy* est uniformément chargé avec une densité linéique positive $\lambda_1 = \lambda$ (Figure 1).

1. Donner l'expression des composantes du champ électrique crée par ce fil au point M situé sur l'axe *Ox* ,tel que $OM = x$, en fonction de α_1 et α_2 .
2. Que sera l'expression du champ lorsque le fil devient infini ?
3. On place maintenant un seconde fil infini de densité linéique $\lambda_2 = -\lambda$, à une distance *d* du premier fil (Figure 2). Donner l'expression du vecteur champ électrique crée par les deux fils en un point *M* situé à une distance *x* du premier fil.

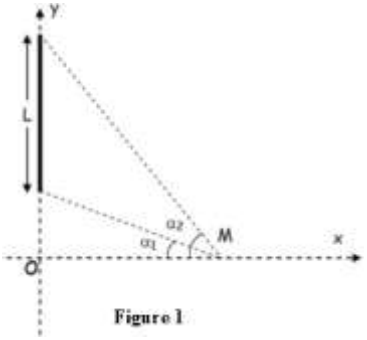


Figure 1

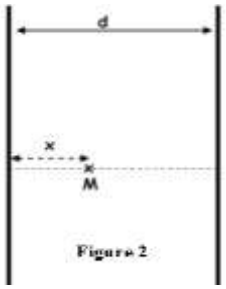


Figure 2

Exercice 3 :

Soit un fil demi-circulaire de centre $O(0,0)$ et de rayon R (Figure 3) chargé par une densité de charges électriques linéique uniforme et positive ($\lambda>0$). Une charge ponctuelle positive $Q_0 = +2q$ est placée au centre $O(0,0)$. Dans la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

1. Déterminer le vecteur champ électrique total $\vec{E}(O)$ créé par le fil au centre $O(0,0)$.
2. Déterminer le vecteur de la force électrique $\vec{F}_{Q_0}$ agissant sur une charge Q_0 placée au centre $O(0,0)$.

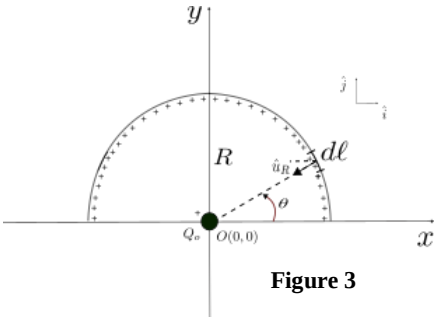


Figure 3

Exercice 4 :

Soit un disque percé de centre O et de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 chargé uniformément avec la densité surfacique uniforme σ positive.

1. Déterminer $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique créé par la charge du disque au point *M*.
2. Examiner les deux cas d'un disque non percé $(R_1 = 0)$ et d'un plan infini ($R_1 = 0$ et $R_2 \to +\infty$).

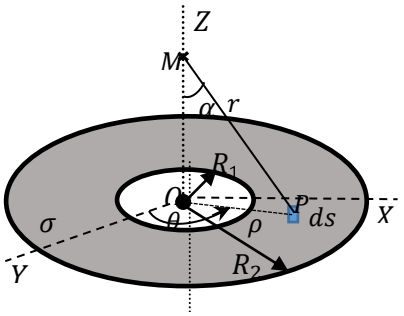


Figure 4

Exercices supplémentaires

Exercice S1

1. Calculez le champ électrique crée au point M par deux charges identiques $Q/2$ placées aux points A et B séparées par une distances $2a$, comme le montre la figure 1.
2. Calculez le champ crée au point M par une charge Q distribuée uniformément sur un segment de droite de longueur $2a$ (densité de charge $\lambda > 0$), comme le montre la figure 2.
3. Comparez les deux résultats dans les cas où $y \gg a$ et $y = a$.

Figure 1

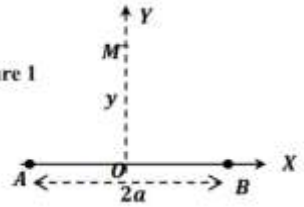
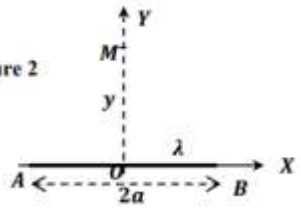
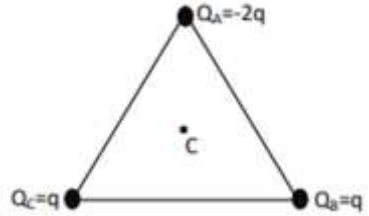


Figure 2



Exercice S2

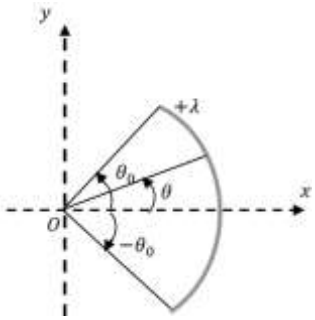
Soient trois charges ponctuelles $\boldsymbol{Q_A}$, $\boldsymbol{Q_B}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{Q_C}$ placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté $\boldsymbol{a}$, comme représenté sur la figure ci-contre ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{1nC}$).



1. Déterminer et représenter le vecteur champ électrique créé par ces trois charges au centre de gravité C du triangle.
2. Un électron est placé au centre du triangle. Donner l'expression de la force appliquée sur l'électron.

Exercice S3

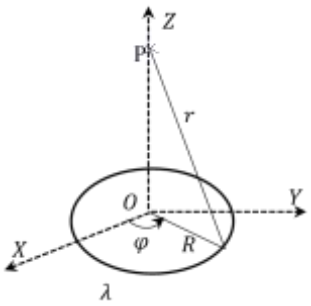
Une tige mince, en forme d'arc de cercle de rayons R_1, uniformément chargée avec une densité linéique de charge $(+\lambda)$. Cet arc forme un angle total $2\theta_0$ symétrique par rapport à l'axe (OX).



1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ à l'origine O ;
2. Que devienne l'expression du champ dans les cas où $\theta_0 = \pi/2$ (demi-cercle) et $\theta_0 = \pi$ (cercle entier).

Exercice S4

Une charge linéaire $(\lambda > 0)$ est répartieuniformément sur un fil en forme d'anneau de rayon. (figure ci-dessous).



1- Déterminer le champ électrique produit par le fil au point P situé sur l'axe Oz à une distance z du centre.
2- Trouver le potentiel électrique produit au point P par deux méthodes.
3- Déterminer par le calcul le point pour lequel le champ électrique est maximal.

Exercice S5

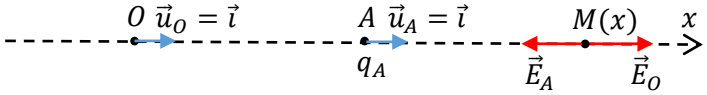
1. Considérons deux plans infinis. Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique $(+\sigma)$ et le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique $(-\sigma)$. Déterminer le champ électrique crée par les deux plans en un point M quelconque de l'espace dans les cas suivants :
   - Les deux plans sont parallèles et séparés par une distance d;
   - Les deux plans son perpendiculaires.
2. Que devienne l'expression du champ si les deux plans sont chargés de la même charge.
3. Répéter la question 1 pour le cas de deux fils infinis. Le premier plan est chargé positivement avec une densité linéique $(+\lambda)$ et le second plan est chargé négativement avec une densité linéique $(-\lambda)$.

Corrigé

Exercice 1

1. Le champ électrostatique dans les régions :

a) $x > a$:

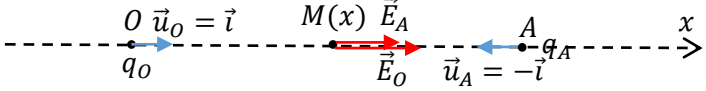


$$\vec{E}(M) = \vec{E}_O + \vec{E}_A$$

$$= k\frac{q_O}{OM^2}\vec{u}_O + k\frac{q_A}{AM^2}\vec{u}_A = k\frac{3q}{x^2}\vec{\imath} - k\frac{q}{(x-a)^2}\vec{\imath}$$

Donc, $\vec{E}(M) = kq\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\vec{\imath}$

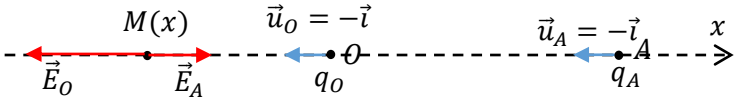
b) $0 < x < a$:



$$\vec{E}(M) = k\frac{q_O}{OM^2}\vec{u}_O + k\frac{q_A}{AM^2}\vec{u}_A = k\frac{3q}{x^2}\vec{\imath} + k\frac{q}{(a-x)^2}\vec{\imath}$$

Donc, $\vec{E}(M) = kq\left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right)\vec{\imath}$

c) $x < 0$:



$$\vec{E}(M) = k\frac{q_O}{OM^2}\vec{u}_O + k\frac{q_A}{AM^2}\vec{u}_A = -k\frac{3q}{x^2}\vec{\imath} + k\frac{q}{(a-x)^2}\vec{\imath}$$

Donc, $\vec{E}(M) = kq\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right)\vec{\imath}$

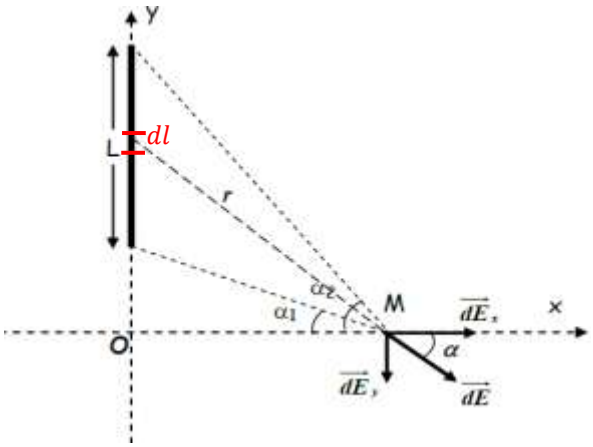
2. q' est en équilibre ⇒la résultante des forces appliquées sur elle est nulle $\Longrightarrow q'\vec{E}(M) = \vec{0}$

Donc $\vec{E}(M) = \vec{0}$. Un seul cas est possible $(x > a) \Longrightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} = 0$

$$\Longrightarrow 2x^2 - 6ax + 3a^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})a \\ x_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})a < a \quad (rejeté) \end{cases}$$

Exercice 2

1. Champ crée par le fil au point M :
Soit un élément de longueur dl porte une charge élémentaire dq. Cette charge génère au point M un champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$, son expression est donnée par:



$$\overrightarrow{dE} = \frac{kdq}{r^2}\ \vec{u} = \frac{k\lambda_1 dy}{r^2}\ \vec{u}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha \end{cases}$$

On exprime tout en fonction de alpha:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

Donc

$$\Rightarrow \begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{k\lambda_1 dy}{r^2}\cos\alpha = \dfrac{k\lambda_1}{x}\cos\alpha\, d\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha = -\dfrac{k\lambda_1 dy}{r^2}\sin\alpha = -\dfrac{k\lambda_1}{x}\sin\alpha\, d\alpha \end{cases}$$

En intégrant entre α_1 et α_2 :

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k\lambda_1}{x}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{k\lambda_1}{x}\,(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$E_y = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k\lambda_1 dy}{r^2}\sin\alpha = \frac{k\lambda_1}{x}\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

2. Si le fil est infini donc: $\alpha_1 \longrightarrow (-{}^{\pi}/_{2})$ et $\alpha_2 \longrightarrow {}^{\pi}/_{2}$

$$E_x = \frac{2k\lambda_1}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E_y = 0$$

$$\vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$

Le champ électrique créé par un fil infini en un point dans l'espace est perpendiculaire sur le fil et son module ne dépend que de la distribution de charge et la distance orthogonale entre le point et le fil.

3. Champ crée par les deux fils.
En utilisant le principe de superposition :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Avec $\vec{E}_1$ le champ électrique créé par le premier fil et $\vec{E}_2$ le champ électrique créé par le second fil.

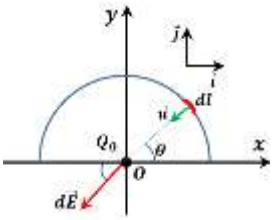
$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\vec{\imath}$$

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\right)\vec{\imath}$$

Exercice 3

1. Calcul de $\vec{E}$



Un element de longeur dl porte une charge elementaire dq. Cette charge genere un champ electrique $d\vec{E}$ au point O. $d\vec{E} = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}$

$$\vec{u} = -\cos(\theta)\,\vec{\imath} - \sin(\theta)\vec{\jmath}$$

$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta, r = R$

$$d\vec{E}(O) = \begin{cases} dE_x = -\dfrac{Kdq}{R^2}\cos\theta = -\dfrac{K\lambda}{R}\cos(\theta)d\theta \\ dE_y = -\dfrac{Kdq}{R^2}\sin\theta = -\dfrac{K\lambda}{R}\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\vec{E}(O) = \int_{\pi}^{\pi} d\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\dfrac{K\lambda}{R}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(\theta)\,d\theta = -\dfrac{K\lambda}{R}\sin\theta|_0^{\pi} = 0 \\ E_y = -\dfrac{K\lambda}{R}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta = \dfrac{K\lambda}{R}\cos\theta|_0^{\pi} = -\dfrac{2K\lambda}{R} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\frac{2K\lambda}{R}\vec{\jmath}$$

2. Le vecteur de la force électrique $\vec{F}_{fil/Q_0}$ exercée par le fil chargé sur la charge Q_0 au point O est decrit par :

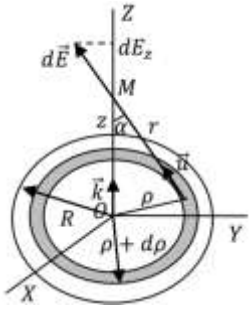
$$\vec{F}(M) = Q_0\vec{E}(M) = -\frac{4Kq\lambda}{R}\vec{\jmath}$$

Exercice 4

Les plans (OXZ) et (OYZ) sont des plans de symétrie de la distribution : le champ appartient à l'intersection de ces deux plans. En d'autres termes, il est porté par l'axe (OZ) :

$\vec{E}(M) = \vec{E}_z(M)\vec{k}$

Un élément de surface dS du disque, portant la charge élémentaire $dq = \sigma dS$, crée au point M un champ élémentaire :



$$d\vec{E}(M) = k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}$$

Suivant l'axe (OZ) :

$$dE_z(M) = dE(M)\cos\alpha = k\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\alpha$$

Prenons comme élément de surface, la couronne circulaire élémentaire comprise entre les rayons ρ et $(\rho + d\rho)$ de surface :

$$dS = 2\pi\rho d\rho$$

Nous avons également d'après la figure :

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

On en déduit que :

$$dE_z(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.\sigma.2\pi.\rho.d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'expression de la composante E_z est obtenue par intégration sur toute la surface du disque :

$$E_z(M) = \int_{R_1}^{R_2} dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho.d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Cette intégrale peut être calculée en effectuant le changement de variable suivant :

$$\rho^2 + z^2 = u \Longrightarrow du = 2\rho.d\rho$$

Ce qui nous donne l'expression du champ créé par la couronne au point M pour $z > 0$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + {R_1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + {R_2}^2}}\right]\vec{k}$$

Pour un disque non percé ($R_1 = 0$) :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{z^2 + {R_2}^2}}\right]\vec{k}$$

Pour un plan infini ($R_1 = 0$ et $R_2 \to +\infty$) :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$