Série de TD n°4 (À traiter en deux séances)

Exercice N°1

Les composantes du champ électrique dans la figure ci-contre (Fig.1) sont :

$$E_x=800\sqrt{x},\ E_y=0,\ E_z=0.$$

- Calculer le flux du champ électrique à travers la surface du cube ainsi q la charge à l'intérieur de ce cube (a = 10 cm).

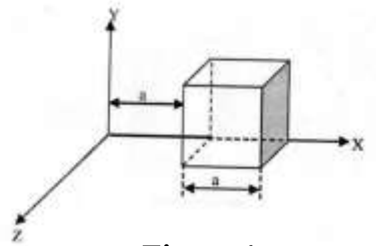


Figure 1

Exercice N°2

On considère une distribution de charge constituée un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique λ > 0 coïncidant avec l'axe Oz, et d'un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R, portant une densité surfacique σ > 0 (Fig. 2).

En utilisant le théorème de Gauss :

a) Trouver le champ électrostatique $\vec{E}\,(M)$ créé en un point M à l'intérieur du cylind

b) Trouver le champ électrostatique $\vec{E}\,(M)$ créé en un point M à l'extérieur du cylind

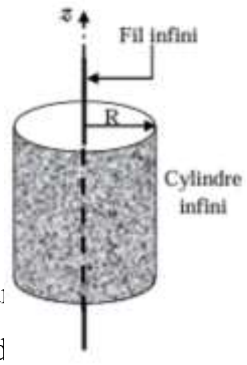


Figure 2

Exercice N°3 :

On considère deux sphères concentriques de même centre O et de rayons respectifs R_1 et $R_2=\sqrt{2.5}\,R_1$ (Fig.3), portant des charges telles que :

- La sphère interne (O, R_1) porte une densité de charges volumique $\rho=\frac{15}{4R_1}\ (C/m^3)$.
- La sphère externe (O, R_2) porte une densité de charges surfacique $\sigma=-0.5\,C/m^2$.

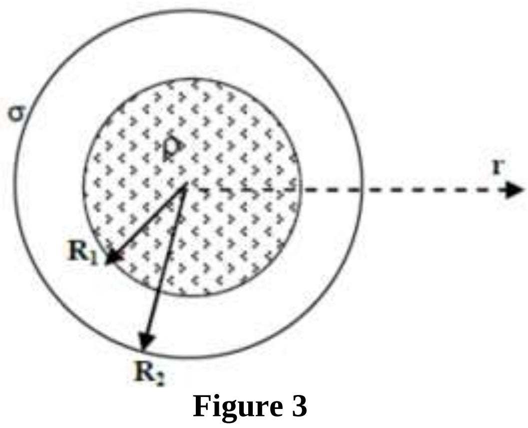


Figure 3

1- Déterminer la charge totale portée par chaque sphère.

2- Trouver le champ électrique en tout point de l'espace $(0<r<\infty)$.Destinguer les régions :$(0<r\le R_1)$, $(R_1<r\le R_2)$, $(r\ge R_2)$.

3- Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace, sachant que $V(\infty)=0$.

Exercices Supplémentaires

Exercice S1

Soit une distribution uniforme de charges, de densité volumique $\rho > 0$ répartie entre 2 sphères concentriques (même centre), S1 et S2, de centre O et de rayons respectifs $R1$ et $R2$ ($R1 < R2$). En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de l'espace tel que OM= r.

Distinguer les régions : $r < R1$, $R1 < r < R2$ et $r > R2$.

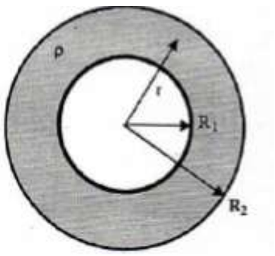


Figure 1

Exercice S2

On considère deux sphères (S_1) et (S_2) concentriques, creuses, de rayons R_1 et R_2 ($R_1<R_2$) et de charges totales $Q_1=+Q$ et $Q_2=-Q$, respectivement. Ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes (Fig.2).

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}\ (M)$ en tout point M de l'espace. Distinguer les trois régions :$<R_1$,$R_1<r<R_2$,$r>R_2$.

2. Trouver l'expression du potentiel (M), sachant que le potentiel est nul à l'infini.

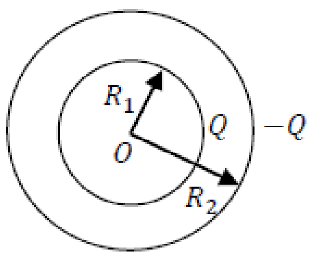


Figure 2

Exercice S3

On considère deux cylindres infinis et coaxiaux. Le premier est uniformément chargé avec une densité volumique ρ positive, comprise entre son rayon intérieure R_1 et extérieure R_2. Le deuxième, de rayon R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$) est uniformément chargé en surface avec une densité surfacique positive σ (Fig.3).

1. En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. Distinguer les régions : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $r > R$.
2. Trouver le potentiel électrostatique (M) en tout point M de l'espace, sachant que $V(r = 0) = 0$.

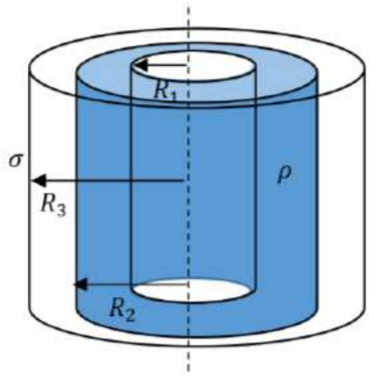


Figure 3

Corrigé

Exercice 01 :

:

Le champs est parallèle à l'axe OX donc son flux a travers le cube se réduit aux flux a travers les deux faces perpendiculaires a l'axe OX (en gris sur la figure)

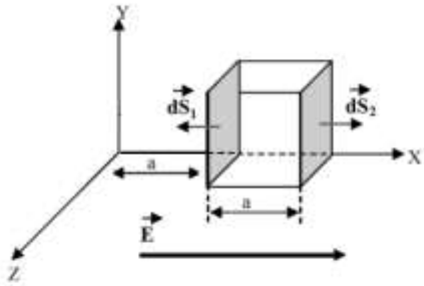
$$\varphi_E = \oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \int \vec{E}\,\overrightarrow{dS_1} + \int \vec{E}\,\overrightarrow{dS_2} = -ES_1 + ES_2$$

$$= -800\sqrt{0{,}1}\ (0{,}1)^2 + 800\sqrt{0{,}2}\ (0{,}1)^2$$

$$= -2{,}53 + 3{,}58 = 1{,}05\ [\tfrac{N}{C}\ m^2]$$

$$\varphi_E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = \varphi_E.\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow Q_{int} = 1{,}05 \,.\, 8{,}85 \,.\, 10^{-12} = 9{,}3 \,.\, 10^{-12}\ C$$



Exercice 02 :

Symétrie cylindrique : le champ électrique est radiale (perpendiculaire à l'axe (Oz)) $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Surface de Gauss ; cylindre de rayon r, d'axe (Oz) et de hauteur h

Calcul du flux : la surface d'un cylindre est constituée de trois surfaces ; 02 surfaces de bases (S_1 et S_2) et une surface latérale (S_3). Donc, il y aura trois flux :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \iint_{(S_1)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \iint_{(S_2)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \iint_{(S_3)} \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)\vec{e}_r).(dS\vec{n}_3)$$

$$= \iint_{(S_1)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E(r)dS).(\vec{e}_r.\vec{n}_3)$$

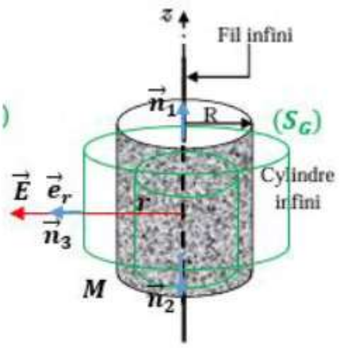
$$\iint_{(S_3)} EdS\ \ (\vec{e}_r \perp \vec{n}_{1,2})$$

Par ailleurs, le champ est constant sur la surface latérale :

$$\Phi = E \iint_{(S_3)} dS = ES_3 = E(2\pi rh)$$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)(2\pi rh) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$



Si $r < R$: $Q_{int} = \lambda h$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Si $r > R$: $Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi Rh$

$$E(r) = \frac{\lambda + \sigma 2\pi R}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercice 03 :

1- Charges des deux sphères:

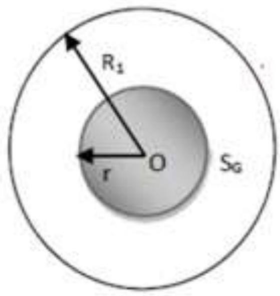
Sphères 1 : $Q_1 = \int_0^{R_1} \rho dV = \rho \int_0^{R_1} dV\,, Q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi {R_1}^3 = 5\pi {R_1}^2$

Sphères 2 : $Q_2 = \int_0^{R_2} \sigma dS = \sigma \int_0^{R_2} dS\,, Q_2 = -0.5\; 4\pi {R_2}^2 = -5\pi {R_1}^2$

2- La symétrie de la distribution des charges est sphérique, donc, le champ électrique est radial :

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$$

La surface de gauss est une sphère de centre o et de rayon r.



Théorème de Gauss :

$$\phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le champ est constant sur la surface de Gauss :

$$\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint E.dS = E\iint dS \Rightarrow E\iint dS = 4\pi r^2$$

$(0 < r \leq R_1)$:

$$Q_{int} = \int_0^r \rho dV = \rho \int_0^r dV\,, Q_{int} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = 5\pi r^2$$

$$E_1 = \frac{5}{4\varepsilon_0} \quad , \vec{E}_1 = \frac{5}{4\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

$(R_1 < r \leq R_2)$:

$$Q_{int} = Q_1 = 5\pi {R_1}^2$$
$$E_2 = \frac{5}{4\varepsilon_0} \quad , \vec{E}_2 = \frac{5{R_1}^2}{4\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$(\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{R_2})$ **:**

$$Q_{int} = Q_1 + Q_0 = 0$$
$$E_3 = 0 \quad , \vec{E}_3 = \vec{0}$$

3- Le potentiel électrique

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = E(r)dr \Rightarrow V(r) = \int E(r)dr$$

Région 1 : $V_1 = -\frac{5}{4\varepsilon_0}r + C_1$

Région 2 : $V_2 = \frac{5{R_1}^2}{4\varepsilon_0 r} + C_2$

Région 3 : $V_3 = C_3$

Détermnation des constances :

$$V_3(\infty) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$La\ continuité\ du\ potentel : V_2(R_2) = V_3(R_2) \Rightarrow C_2 = \frac{5{R_1}^2}{4\varepsilon_0 R_2}$$

$$La\ continuité\ du\ potentel : V_1(R_1) = V_2(R_2) \Rightarrow C_1 = -\frac{5R_1}{4\varepsilon_0}\left(2 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$