Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes — Année Universitaire 2013/2014
2ième année Licence de Physique Générale — Mécanique Quantique I

TD N2 : La mécanique ondulatoire de Schrödinger

Exercice 1 :
On considère la distribution gaussienne suivante :

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2},$$

o A, a et λ sont des constantes réelles et positives.

1. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$, déterminer A.
2. Trouver $< x >$, $< x^2 >$ et Δx .
3. Dessiner le graphe de $\rho(x)$.

Exercice 2 :
Soit une particule de masse m décrite par la fonction d'onde $\psi(x,t) = A\left(x - x^3\right)e^{-iEt/\hbar}$. Trouver le potentiel $V(x)$ de sorte que l'équation de Schrödinger soit satisfaite.

Exercice 3 :
Une particule de masse m confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a $(0 \leq x \leq a)$ occupe l'état fondamental décrit par la fonction d'onde $\varphi(x) = A\sin(\pi x/a)$.

1. Trouver A.
2. Déterminer la probabilité de présence de la particule dans l'intervalle $\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{4}$.
3. Calculer la valeur moyenne sur la position $< x >$ et sur l'impulsion $< p >$.
4. Dterminer l'incertitude sur la position Δx et sur l'impulsion Δp. Calculer le produit $\Delta x \Delta p$.

Exercice 4 : La fonction de Dirac $\delta(x)$ (fonction généralisée) est définie par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \neq 0 \\ \infty, & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad avec \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

On considère un potentiel de la forme :

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \quad \text{où} \quad \alpha > 0$$

1. Sous l'influence de $V(x)$, une particule est dans un état lié d'énergie $E < 0$. Trouver l'énergie de cet état ainsi que la fonction d'onde correspondante.
2. On considère une particule d'énergie $E > 0$ voyageant des x négatifs vers les x positifs. Trouver les coefficients de transmission et de réflexion sous l'influence de $V(x)$.

Exercices supplémentaires :
Exercice 5 :

1. Parmi les fonctions suivantes : $f(x) = 3\ \sin\pi x$, $h^2(x) = 5x$, $e(x) = x^2$, quelles sont celles qui peuvent représenter une fonction d'onde physiquement acceptable ?
2. On considère la fonction $\phi(x) = e^{-x^2}$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, peut-elle être une fonction d'onde ?

Exercice 6 :
A l'instant $t = 0$ une particule est représentée par la fonction d'onde :

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A\ (x/a) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ A\ [(b-x)/(b-a)] & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

o A, a et b sont des constantes.

1. Normaliser Ψ (trouver A en termes de a et b).
2. Représenter $\Psi(x,0)$ comme une fonction de x.
3. Dans quelle région la particule est plus susceptible de se trouver $t=0$?
4. Quelle est la probabilité de trouver la particule à gauche de a ? Vérifier votre résultat dans les cas limites $b=a$ et $b=2a$.
5. Quelle est la valeur moyenne de x ?

Exercice 7 :
On considère la fonction d'onde
$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$
o A, λ et ω sont des constantes réelles et positives.

1. Normaliser Ψ .
2. Déterminer la valeur moyenne de x et de x^2.
3. Trouver l'écart type Δx. Dessiner le graphe de $|\Psi|^2$ comme une fonction de x.

Exercice 8 :
On considère une particule décrite par la fonction d'onde :

1. $\phi(x) = A\ e^{ikx} + B\ e^{-ikx}$.
2. $\phi(x) = A\ e^{-\alpha x}$.
3. $\phi(x) = R(x)\ e^{iS(x)/\hbar}$.
4. $\psi(x,t) = \left[Ae^{ipx/\hbar} + Be^{-ipx/\hbar}\right] e^{-ip^2t/2m\hbar}$.
5. $\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-iE_2 t/\hbar}$.

Calculer dans chaque cas le courant de probabilité correspondant.

Exercice 9 :
Une particule de masse m est confinée dans une boite rectangulaire bidimensionnelle. Le potentiel de confinement $V(x,y)$ est donnée par :
$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \ \text{ et } \ 0 \le y \le b \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Préciser les condition aux limites que doit satisfaire la fonction d'onde $\Psi(x,y,t)$ décrivant la particule.
2. Exprimer l'equation de Schrödinger puis en utilisant la procédure de séparation des variables, trouver les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'énergie de la particule.

Exercice 10 :
On considère une particule de masse m soumise un potentiel unidimensionnel de la forme :
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a/2 \\ -V_0 & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & a/2 < x \end{cases}$$

On s'intéresse à l'étude des états liés de la particule.

1. crire les solutions de l'quation de Schrödinger stationnaire dcrivant la particule dans la cas où $(-V_0 < E < 0)$ pour chaque régions : I $(x < -a/2)$, II $(-a/2 < x < a/2)$, III $(a/2 < x)$.
2. Appliquer les conditions de continuité aux points $x=-a/2$ et $x=a/2$. Obtenir une équation pour les énergies possibles. Représenter graphiquement cette équation dans le but d'obtenir les propriétés qualitatives de la solution.