



ANALYSE I - TD N° 1 (CORPS DES NOMBRES RÉELS)

Exercice 1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, soit M_A l'ensemble des majorants de A . Montrer que

$$\inf M_A = \sup A.$$

Exercice 2. Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide et bornée. Soit

$$D = \{ \sqrt{x}, x \in A \}.$$

1- Montrer que D est bornée.

2- Montrer que $\inf D = \sqrt{\inf A}$ et $\sup D = \sqrt{\sup A}$.

Exercice 3. Soient A et B deux parties bornées non vides de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que

$$\min A \text{ existe} \implies \min A = \inf A.$$

Si $\inf A$ existe, est-ce que $\min A = \inf A$?

2) Montrer que $A \subseteq B \implies \sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

3) On désigne par $-A = \{-x, x \in A\}$. Montrer que

$$\inf(-A) = -\sup(A) \text{ et } \sup(-A) = -\inf A.$$

4) Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \text{ et } \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

Exercice 4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et minorées. On note

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}; \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}.$$

Montrer que

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Exercice 5. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum; s'ils existent :

$$A_1 = [0, 2[, A_2 =]-1, 0] \cup \{2, 5\}, A_3 = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}, A_4 = \left\{ \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$A_5 = \left\{ \sin \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 6.

1) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$a) |x + y| \leq |x| + |y|, b) ||x| - |y|| \leq |x - y|, c) |x| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \iff x = 0.$$

2) Montrer que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Exercice 7. Soit E la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.

a) Donner $E(-2, 1)$, $E(-2025)$, $E(\sqrt{3})$, $E(-4\pi)$.

b) Démontrer les résultats suivants

$$1) \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies E(x) \leq E(y).$$

$$2) \forall x, y \in \mathbb{R}, E(x + y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}.$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x), .$$