



ANALYSE I - TD N° 2 (NOMBRES COMPLEXES - SUITES RÉELLES)

Exercice 1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants

$$z_1 = (2 + 2i)^6, \quad z_2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{12}.$$

Exercice 2.

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 + e^{ia}, \quad z_2 = 1 - e^{ia}, \quad z_3 = e^{ia} + e^{ib}.$$

Exercice 3. 1) Donner la forme algébrique, la forme trigonométrique et la forme exponentielle du nombre complexe

$$\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}.$$

En déduire

$$\cos \frac{5\pi}{12}, \quad \sin \frac{5\pi}{12} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)^{24}.$$

2) Linéariser les expressions $\cos^4 \theta$, $\sin^3 \theta \times \cos^2 \theta$.

3) Montrer que $\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$. En déduire $\sin \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$.

4) Calculer les racines cubiques z_0, z_1 et z_2 de l'unité puis vérifier que $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0$.

Exercice 4.

a) Montrer que $1 + e^{it} + \dots + e^{int} = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} t \right)}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{nit}{2}}$.

b) En déduire $1 + \cos t + \dots + \cos(nt)$.

Exercice 5. En appliquant la définition de la limite d'une suite, démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n} + 4} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + n^2) = +\infty.$$

Exercice 6. Étudier la nature des suites numériques suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2}, \quad v_n = \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2}, \quad w_n = \frac{E(\sqrt{n})}{1 + \sqrt{n}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad h_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 7. On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par

$$u_n = \prod_{k=2}^n \cos \left(\frac{\pi}{2^k} \right), \quad v_n = u_n \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right).$$

1) Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

2) Montrer que $(v_n)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 8. Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs.

$$U_0 \geq V_0 > 0, U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ et } V_n = \frac{1}{2U_n}.$$

1- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } (U_n + V_n)^2 - 2 = (U_n - V_n)^2.$$

2- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } (U_{n+1} - V_{n+1}) = \frac{1}{4U_{n+1}} (U_n - V_n)^2.$$

3- En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } U_n \geq V_n.$$

4- Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

5- Montrer que les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite. Déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 9. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1- Montrer que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2- En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 10. Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la nature des suites suivantes :

$$1) u_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$2) v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{\cos n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

