

EXAMEN D'ANALYSE II (DURÉE : 1H:30)

Appareils électroniques et documents sont interdits.

Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (3 pts) Questions de cours.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

- 1) Si f est bijective et paire, alors sa fonction réciproque f^{-1} est paire.
- 2) Soit f une fonction, définie dans un voisinage de zéro, et admettant un développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2).$$

Alors f est deux fois dérivable en zéro.

- 3) Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$.

Exercice 2. (6 pts) On considère la fonction suivante :

$$f(x) = e^{ax} - \ln(\cos x) - 1, \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

- 1) Écrire le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 2.
- 2) A quelle condition sur a le rapport $\frac{f(x)}{x^2}$ admet une limite finie, quand x tend vers 0? Déterminer alors la valeur de cette limite.

Exercice 3. (5 pts) En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n^2 + k^2) - \ln n^2}{n}.$$

Exercice 4. (6 pts) Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx.$$

- 1) Sans calculer I et J , montrer que $I = J$.
- 2) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x).$$

- 3) En déduire que

$$I + J = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

- 4) Calculer $I + J$. En déduire I et J .

Indication  : $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

CORRIGÉ DÉTAILLÉ - ANALYSE II

Solution 1.

1). Faux. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, bijective et paire, mais $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ n'est pas paire car

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x), \forall x \in [-1, 1]. \leftarrow 01 \text{ pt}$$

2). Faux. Considérons f donnée par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Nous avons $f(x) = o(x^2)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, donc f admet un $DL_2(0)$ dont la partie régulière est nulle. Mais f n'est pas deux fois dérivable en 0 car n'est pas continue en 0. $\leftarrow 01 \text{ pt}$

3). Faux. Une fonction en escalier non continue est intégrable. car toute fonction en escalier est intégrable sur chaque intervalle fermé borné. $\leftarrow 01 \text{ pt}$



Solution 2.

1) Le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

i) On cherche le $DL_2(0)$ pour e^{ax} . On a

$$e^{ax} = 1 + ax + a^2 \frac{x^2}{2} + o(x^2). \leftarrow 01 \text{ pt}$$

ii) On cherche le $DL_2(0)$ pour $\ln(\cos x)$. On remarque que

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

Posons

$$h(y) = \ln(1 + y) \text{ et } g(x) = \cos(x) - 1. \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, et les développements limités de h et g à l'ordre 2 au voisinage de 0 sont $\leftarrow 0.5 \text{ pt}$

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

et

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2). \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

donc

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos(x) - 1)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2). \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

D'où

$$f(x) = e^{ax} - \ln(\cos x) - 1 = ax + \frac{a^2 + 1}{2} x^2 + o(x^2). \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

2) La condition sur a pour que la limite de rapport $\frac{f(x)}{x^2}$ soit finie est $a = 0$. 0.5 pt

Si $a = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{01 pt}$$



Solution 3.

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n^2 + k^2) - \ln n^2}{n}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n^2 + k^2) - \ln n^2}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(\frac{n^2 + k^2}{n^2}\right)}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right). \quad \leftarrow \text{0.5 pt}$$

Posons $[a, b] = [0, 1]$, donc

$$a_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n \quad \text{et} \quad f(a_k) = \ln\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \ln(1 + (a_k)^2). \quad \leftarrow \text{0.5 pt}$$

Posons $a_k = t$, donc

$$f(t) = \ln(1 + t^2). \quad \leftarrow \text{0.5 pt}$$

S_n : Somme de Riemann associée à une subdivision régulière de $[0, 1]$ pour $f(t) = \ln(1 + t^2)$.

Comme f est intégrable sur $[0, 1]$ car elle est continue, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n^2 + k^2) - \ln n^2}{n} = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt. \quad \leftarrow \text{0.5 pt}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on intègre par parties. Posons $f'(t) = 1$ et $g(t) = \ln(1 + t^2)$, donc $f(t) = t$ et $g'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt \\ &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2 + 2 - 2}{1 + t^2} dt \\ &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 dt + 2 \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - 2[t]_0^1 + 2[\arctan t]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \quad \leftarrow \text{01 pt} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n^2 + k^2) - \ln n^2}{n} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \quad \leftarrow \text{0.5 pt}$$

Solution 4.

1) Remarquons que

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x) - \sin(x)) dx \\
&= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0 + \cos 0) = 0. \quad \leftarrow \boxed{01 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $I = J$.

2) On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left(\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) \\
&= \cos(x) + \sin(x). \quad \leftarrow \boxed{01 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

3) Remarquons encore que

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos(x) + \sin(x)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad \leftarrow \boxed{0.5 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

Posons $t = x - \frac{\pi}{4}$. Alors $dt = dx$. Aussi $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$I + J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos(t)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos(x)}. \quad \leftarrow \boxed{0.5 \text{ pt}}$$

4) Maintenant pour calculer $I + J$, posons $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors on a

$$\cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \text{ et } dx = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Les bornes : Pour $x = -\frac{\pi}{4}$, on a $u = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ et pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $u = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Sachant que

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1,$$

alors

$$\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{2} + 1.$$

Ainsi,

$$I + J = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u^2}. \quad \leftarrow \boxed{1.5 \text{ pts}}$$

Pour calculer

$$\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u^2}.$$

En utilisant la méthode de la décomposition en éléments simples. On a

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}, \quad \leftarrow \boxed{0.5 \text{ pt}}$$

qui donne par identification $a = b = \frac{1}{2}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1-u} + \int_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{1+u} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} [-\ln |1-u| + \ln |1+u|]_{-\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-\ln(2-\sqrt{2}) + \ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{2} - \ln(2-\sqrt{2})) \\
 &= \sqrt{2} (\ln \sqrt{2} - \ln(2-\sqrt{2})) = \sqrt{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}) . \quad \leftarrow \boxed{0.5 \text{ pt}}
 \end{aligned}$$

En déduire I et J . On a

$$\begin{cases} I - J &= 0, \\ I + J &= \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}) . \end{cases}$$

Donc,

$$I = J = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(1+\sqrt{2}) . \quad \leftarrow \boxed{0.5 \text{ pt}}$$

