TD N°3 : Cadre Mathématiques

Exercice 1 :
Les fonctions d'ondes stationnaires d'une particule piégée dans une boite unidimensionnel de largeur a :

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a}), \qquad \text{avec } n = 1, 2, 3, \cdots$$

constituent une base orthonormée dans l'espace F. Vérifier que l'ensemble $\{\phi_n(x)\}$ est orthonormé (utiliser : $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$).
La particule précédente est décrite par la fonction d'onde :

$$\psi(x) = C \sin^3 \frac{\pi x}{a}$$

1. Exprimer $\psi(x)$ dans la base $\{\phi_n(x)\}$. (utiliser : $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$)
2. Normaliser $\psi(x)$.
3. Calculer la valeur moyenne de l'hamiltonien du système $\widehat{H} = \frac{\widehat{P_x}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$.

Exercice 2 : On considère l'opérateur

$$\hat{Q} = i\frac{d}{d\phi}$$

où ϕ est la coordonnée polaire à deux dimensions.

1. Montrer que les fonctions propres normalisées de $\hat{Q}$ sont de la forme

   $$u_n(\phi) = \frac{e^{-in\phi}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

   en utilisant la condition d'univalence

   $$u_n(\phi) = u_n(\phi + 2\pi)$$

   et la condition de normalisation :

   $$\int_0^{2\pi} |u_n(\phi)|^2 \, d\phi = 1$$

2. On peut voir ϕ comme étant la coordonnée d'une particule se déplaçant sur un cercle de rayon unité. On considère une particule décrite par la fonction d'onde normalisée suivante

   $$\psi(\phi) = N \cos^2 \phi$$

   où N est une constante de normalisation. Exprimer $\psi(\phi)$ dans la base orthonormée $\{u_n(\phi)\}$, déterminer N puis calculer le produit scalaire de $\psi(\phi)$ avec $u_{-2}(\phi)$, $u_0(\phi)$ et $u_2(\phi)$.

Exercice 3 :
Obtenir des expressions détaillées pour les opérateurs suivants :

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2, \quad \left(x\frac{d}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{d}{dx}(x)\right)^2.$$

Exercice 4 :
Trouver la valeur de la constante A qui rend la fonction $\exp(-\lambda x^2)$ fonction propre de l'opérateur $\left(\frac{d^2}{dx^2} + Ax^2\right)$.

Quelle est la valeur propre correspondante ?

Exercice 5 :

L'opérateur $(x + \dfrac{d}{dx})$ a une valeur propre λ. Obtenir la fonction propre correspondante.

Exercice 6 :

Parmi les fonction suivantes, quelles sont les fonctions propres de l'opérateur $\dfrac{d^2}{dx^2}$? Pour toute fonction propre trouver la valeur propre correspondante :

1. $\psi = A \sin mx$.
2. $\psi = B \cos nx$.
3. $\psi = Cx^2$.
4. $\psi = D/x$.
5. $\psi = E\ e^{-mx}$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 7 :

1. On considère l'opérateur
$$\widehat{Q} = i\frac{d}{d\phi},$$
où ϕ est la coordonnée polaire à deux dimensions. Trouver les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes.
2. On considère l'opérateur
$$\widehat{Y} = \frac{d^2}{d\phi^2},$$
est-il hermitien ? Trouver les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes.

Exercice 8 :

1. On considère trois opérateurs $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Montrer que :
$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$
2. Montrer que :
$$[\widehat{X}^n, \widehat{P_x}] = i\hbar n\widehat{X}^{n-1}$$
3. Montrer que :
$$[f(\widehat{X}), \widehat{P_x}] = i\hbar f'(\widehat{X}) \qquad \forall f(x)$$

Exercice 9 :

1. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles.
2. Montrer que si deux fonctions propres d'un opérateur hermitien sont associées à deux valeurs propres distinctes, alors elles sont orthogonales.

Exercice 10 :

On définit l'opérateur parité $\widehat{P}$ par :
$$\widehat{P}\psi(x) = \psi(-x) \qquad \forall\psi(x)$$

1. Montrer que $\widehat{P}$ est hermitien.
2. Montrer que ses valeurs propres sont ± 1.
3. Montrer que toute fonction $\psi(x)$ peut être exprimée comme une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.