

mini Manuel

de

Mécanique du point

Michel Henry
Nicolas Delorme

→ L1/L2

**Cours
+ EXOS**

DUNOD

Manuel

Mécanique du point

Cours + Exos

Michel Henry

Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans)
Agrégé de physique

Nicolas Delorme

Maître de conférences à l'université du Maine (Le Mans)

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-053940-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1	Cinématique du point	1
1.1	Relativité du mouvement : nécessité d'un référentiel	1
	a) Introduction	1
	b) Notion de référentiel	2
	c) Exemples de référentiel à connaître	3
1.2	Repères	4
	a) Repère d'espace	4
	b) Repère de temps	5
	c) Le système de coordonnées cartésiennes	5
	d) Le système de coordonnées polaires	6
	e) Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes	9
	f) Le système de coordonnées cylindriques	10
	g) Base fixe et base mobile dans le référentiel d'étude	11
	h) Choix du système de coordonnées	12
1.3	Vecteur vitesse d'un point	13
	a) Vitesse moyenne	13
	b) Vecteur vitesse instantanée	14
	c) Expression en coordonnées cartésiennes	15
	d) Expression en coordonnées polaires	16
	e) Expression en coordonnées cylindriques	20
	f) Vecteur vitesse angulaire	21
	g) Vecteur déplacement élémentaire	22
1.4	Vecteur accélération d'un point	24
	a) Définition	24
	b) Expression en coordonnées cartésiennes	24
	c) Expression en coordonnées polaires	25
	d) Expression en coordonnées cylindriques	26

1.5 Exemples de mouvement	28
a) Définitions	28
b) Mouvements rectilignes	28
c) Mouvements circulaires	32
d) Autre type de mouvement : le mouvement parabolique	39
Points clefs	42
Exercices	43
Solutions	46
2 Lois de Newton et Forces	57
2.1 Principe d'inertie (1^{re} loi de Newton)	57
a) Définitions	57
b) Principe d'inertie : 1 ^{re} loi de Newton	61
c) Référentiels galiléens	62
2.2 Principe fondamental de la dynamique (2^e loi de Newton)	64
a) Notion de force	64
b) Principe fondamental de la dynamique (ou 2 ^e loi de Newton)	64
2.3 Actions réciproques (3^e loi de Newton)	67
2.4 Les forces	68
a) Le poids d'un corps : force d'interaction à distance	69
b) Les forces de contact	72
Points clefs	79
a) À retenir	79
b) Méthode de résolution d'un problème de mécanique	80
c) Exemple : le pendule simple	81
Exercices	83
Solutions	88
3 Travail, puissance et énergie	105
3.1 Travail d'une force	105
a) Définition	105
b) Exemples de calcul du travail d'une force sur un trajet AB	108
c) Puissance d'une force	112

3.2 L'énergie en mécanique	113
a) L'énergie cinétique : une énergie liée au mouvement	113
b) L'énergie potentielle : une énergie liée à la position	115
c) L'énergie potentielle de pesanteur	119
d) L'énergie potentielle élastique	120
e) Force conservative et énergie potentielle	122
f) L'énergie mécanique	123
g) Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème	125
3.3 États liés et stabilité d'un système mécaniquement isolé	128
a) Les états liés	128
b) Stabilité d'un système soumis à une force conservative	129
c) Exemple d'une bille sur un sol en forme de cuvette	129
3.4 Chocs entre particules	131
a) Définition	131
b) Propriétés des chocs	132
c) Détermination des vitesses après le choc	134
Points clefs	140
Exercices	142
Solutions	146
4 Oscillateurs mécaniques libres	157
4.1 Oscillateur harmonique	157
a) Définitions	157
b) Exemples d'oscillateurs harmoniques	160
c) Étude énergétique de l'oscillateur harmonique	168
4.2 Oscillateur amorti par frottement visqueux	171
a) Équation différentielle et solutions	171
b) Oscillateur à frottement faible	173
c) Oscillateur à frottement fort	179
d) Cas limite de l'amortissement critique	182
e) Étude énergétique de l'oscillateur amorti	184
Points clefs	187
Exercices	188
Solutions	191

5	Oscillateurs mécaniques forcés	197
5.1	Oscillations forcées	197
	a) Introduction	197
	b) Équation différentielle du mouvement	198
5.2	Étude de l'élongation	201
	a) Expression de l'amplitude complexe	201
5.3	Étude de la vitesse	209
	a) Expression de la vitesse complexe	209
	b) Résonance de vitesse	209
5.4	Aspect énergétique	213
	a) Transfert de puissance	213
	b) Facteur de qualité et bande passante	215
	Points clefs	218
	Exercices	219
	Solutions	221
	Annexe : Utilisation de la représentation complexe	225
	Index	231

Comment utiliser le Mini-Manuel ?

La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



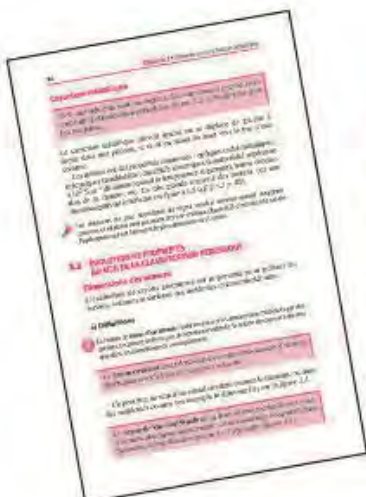
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

PLAN	1.1	Relativité du mouvement : nécessité d'un référentiel
	1.2	Repère de temps et d'espace
	1.3	Vecteur vitesse d'un point mobile
	1.4	Vecteur accélération d'un point mobile
	1.5	Exemples de mouvement
	1.6	Récapitulatif
OBJECTIFS	➤	L'objet de la cinématique du point est l'étude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance.
	➤	Connaître le système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques
	➤	Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques
	➤	Connaître la définition de quelques mouvements particuliers

1.1 RELATIVITÉ DU MOUVEMENT : NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL

a) Introduction

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. Selon la position de l'observateur les conclusions peuvent être différentes alors que l'étude porte sur le même point. Considérons l'exemple simple de la chute d'une bille réalisée dans le wagon d'un train qui se déplace sur une voie rectiligne à vitesse constante. Les résultats de l'étude de ce mouvement obtenus par un observateur assis dans ce wagon et un autre immobile sur le quai seront inévitablement différents (voir *figure 1.1*).

Le mouvement d'un point est donc **relatif** à un observateur fixe dans un **référentiel** d'étude.

- Il n'est pas faux par exemple de dire que le soleil est en mouvement par rapport à la Terre si l'observateur est fixe sur Terre. Il faut donc à chaque fois préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement est effectuée.
- Dans le langage courant ce référentiel est sous-entendu. Dans l'expression « le train se déplace à vitesse constante » il est évident que c'est par rapport au sol et donc la Terre. Le voyageur assis dans un wagon du train peut dire : « je suis immobile », tout le monde comprendra que c'est par rapport au siège du wagon et du wagon lui-même. Il peut dire aussi « je me déplace à grande vitesse » et on comprendra que c'est par rapport à la Terre.

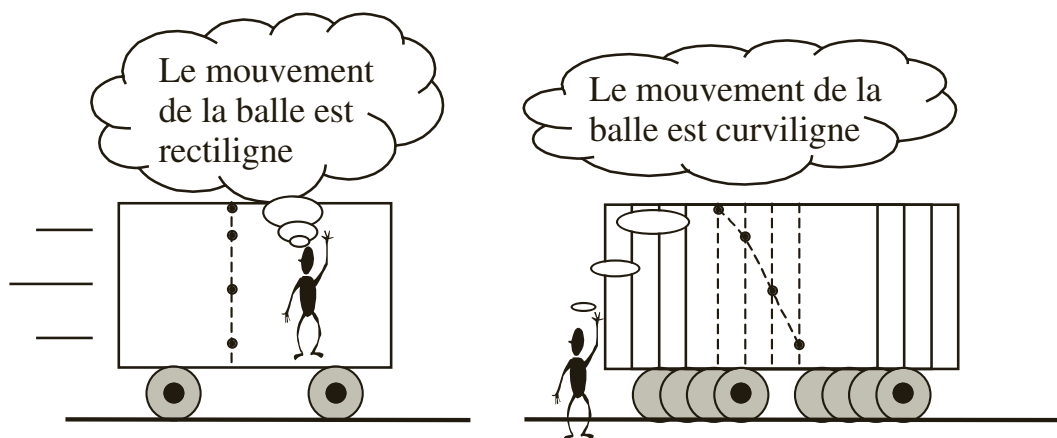


Figure 1.1 Relativité du mouvement pour la chute d'une balle dans un wagon en mouvement rectiligne uniforme : positions d'une balle à différents instants pour un observateur dans le wagon et pour un autre immobile sur le quai.



En mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif de préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée c'est-à-dire indiquer le **référentiel** choisi.

b) Notion de référentiel

Un **référentiel** (ou **solide de référence**) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.



Exemple : l'observateur est dans le train, le référentiel est le train. L'observateur est sur le quai, le référentiel est la Terre.

- Un référentiel peut être caractérisé par son nom. Dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport au train) ou du référentiel « Terrestre » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) sans qu'il y ait d'ambiguïté.
- Un référentiel peut aussi être caractérisé par un point O et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère (O, x, y, z) . Tout ce qui est fixe dans ce repère constitue le référentiel.

Par exemple, pour l'étude du mouvement d'une bille dans un laboratoire il est possible de choisir un point O correspondant à la position de la bille à un instant initial et 3 axes Ox (longueur), Oy (largeur) et Oz (hauteur) lié au laboratoire. Le repère $R(O, x, y, z)$ définit le référentiel d'étude correspondant au référentiel « laboratoire ».



Pour un référentiel donné il existe une infinité de repères possibles (infinité de possibilités de choisir une origine et 3 axes)

Pour un repère donné il n'existe qu'un référentiel associé (tout ce qui est fixe dans le repère forme le référentiel)

c) Exemples de référentiel à connaître

- Le **référentiel de Copernic** (ou héliocentrique du grec *Hêlios* signifiant Soleil). L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction.

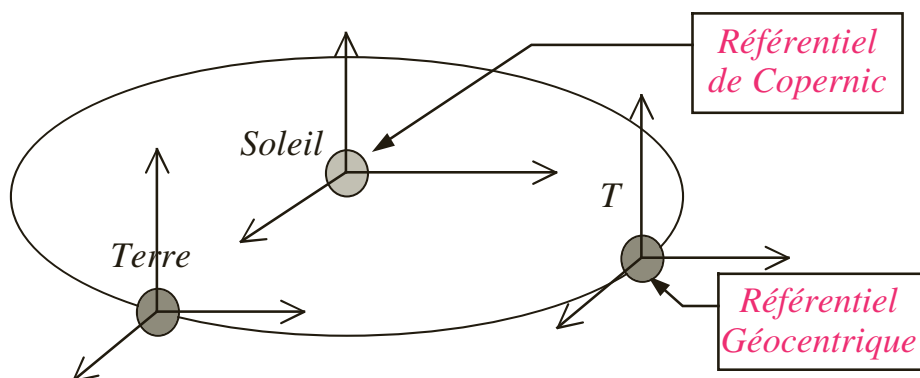


Figure 1.2 Les référentiels de Copernic et géocentrique : le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

- Le **référentiel géocentrique** (du grec *géo* signifiant Terre). Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

- Le **référentiel terrestre** : l'origine de repère choisi est liée à la Terre ainsi que les 3 axes.

Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord-Sud fixe dans le référentiel géocentrique).

Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (voir figure 1.2).

Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères $R(O, x, y, z)$.

1.2 REPÈRES

L'étude cinématique du mouvement d'un point revient à pouvoir répondre aux questions « où ? » (où se trouve le point ?) et « quand ? » (à quel moment dans le temps ?). Pour répondre à ces questions il est nécessaire de définir un repère d'espace et un repère de temps.

a) Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct (voir figure 1.3).

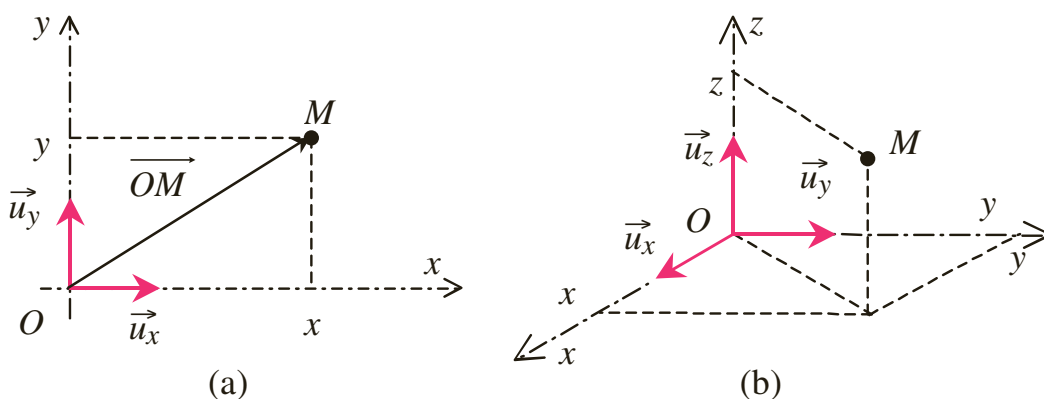


Figure 1.3 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

L'étude du mouvement dans un plan nécessite 2 axes (Ox, Oy) et dans l'espace 3 axes (Ox, Oy, Oz). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée.

b) Repère de temps

Pour pouvoir répondre à la question « quand ? » il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. Tout mouvement périodique (mouvement qui se reproduit identiquement à lui-même à intervalle de temps successifs et égaux pris comme unité de temps) peut servir d'horloge. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie.

À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

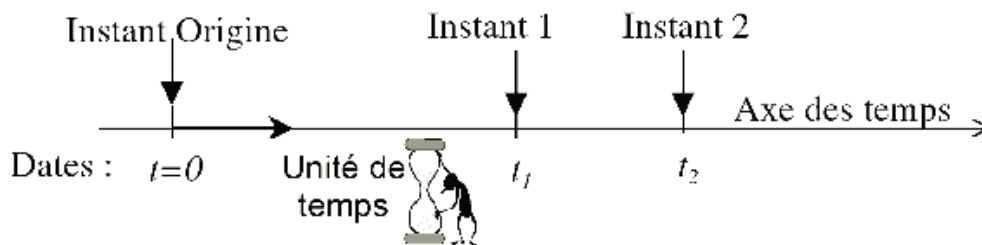


Figure 1.4 Repère de temps : la durée Δt entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

c) Le système de coordonnées cartésiennes

Dans le repère d'espace (O, x, y, z) défini précédemment (voir *figure 1.3*), un point M est repéré par ses coordonnées d'espace (x, y, z) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 3 axes du repère. Ces 3 coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

Dans le référentiel R d'étude, la base associée à ce système d'axe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps. On dit encore que la base est *fixe* dans R .



Quand on dit que la base est *fixe* dans R cela signifie que ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. Ces vecteurs ne sont pas liés à un point : ils peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais par habitude et commodité ils sont en général représentés au point origine O .

Il est pratique de positionner le point M en se donnant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ correspondent alors aux coordonnées du point M :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (1.1)$$



(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point M .

(x, y, z) sont aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

d) Le système de coordonnées polaires

Il existe d'autres systèmes permettant de positionner un point dans le repère d'étude comme par exemple le système de coordonnées polaires utilisé dans le cas où le point M est mobile dans un plan.

Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox (voir figure 1.5 (a)).

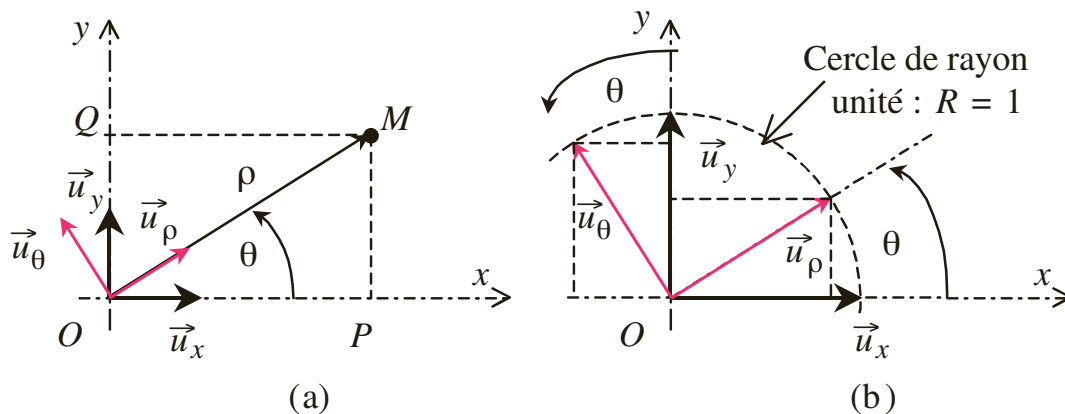


Figure 1.5 Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

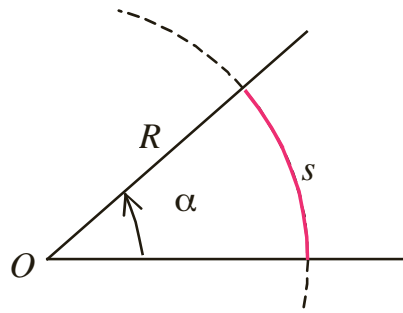
- Le point origine O correspond au « pôle » d'où le terme coordonné polaire. La longueur du segment OM correspond à sa **coordonnée radiale**. Elle est notée ρ (rhô : lettre grecque) ou r .
- L'autre coordonnée est la **coordonnée angulaire** également appelée angle polaire ou azimuth et noté θ (thêta : lettre grecque). Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses Ox appelé alors axe polaire.



Contrairement aux coordonnées cartésiennes x et y , les coordonnées polaires ρ et θ ne sont pas de même nature. La coordonnée radiale ρ a la dimension d'une longueur comme x et y . La coordonnée angulaire s'exprime en radian qui est une unité d'angle sans dimension (voir encart 1.1).

Encart 1.1 Définition d'un angle

Soit un cercle de rayon R , de centre O et un angle α de sommet O exprimé en radian. La mesure s de la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle est donnée par : $s = R\alpha$. L'angle α apparaît comme le rapport de 2 longueurs et est donc sans dimension.



Mesure s de l'arc de cercle :

$$s = R\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s}{R}$$

Figure 1.6 Définition d'un angle exprimé en radian.

► Pour exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ il est commode d'introduire une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ naturellement associée à ce système de coordonnées et définie de la façon suivante (voir figure 1.5) :

- $\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de O vers M . C'est le vecteur *radial* (suivant le rayon) ;
- $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\rho$. Il est obtenu en effectuant une rotation d'un angle de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$. C'est le vecteur *orthoradial* (perpendiculaire au rayon).

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \vec{u}_\rho = \rho \vec{u}_\rho \quad (1.2)$$



(ρ, θ) sont les coordonnées polaires du point M mais ne correspondent pas aux composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (contrairement à ce qu'on obtient en coordonnées cartésiennes). Les composantes de ce vecteur position sont $(\rho, 0)$: il n'y a pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$ mais uniquement une composante ρ suivant $\vec{u}_\rho$.

Encart 1.2 Le produit scalaire

► Le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs :
Le résultat est un scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha$$

avec α l'angle que fait le vecteur $\vec{b}$ avec le vecteur $\vec{a}$.

Si le vecteur $\vec{b}$ est unitaire ($\|\vec{b}\| = 1$) alors le produit scalaire représente la projection du vecteur $\vec{a}$ sur la direction de $\vec{b}$.

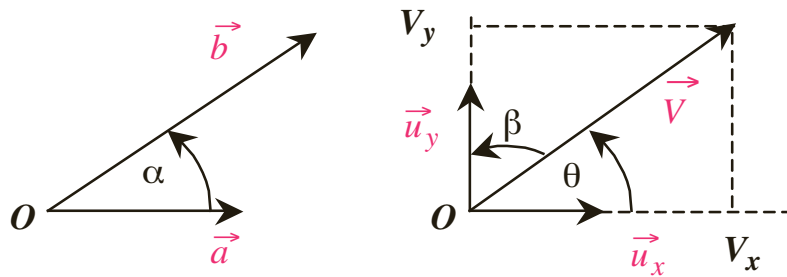


Figure encart : Produit scalaire et projection d'un vecteur.

► Projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur la direction $\vec{u}_x$ (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_x\| \cos \theta = V \cos \theta = V_x$$

► Projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur la direction $\vec{u}_y$ (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_y = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_y\| \cos \beta = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V \sin \theta = V_y$$

► Expression du produit scalaire en fonction des composantes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a \vec{u}_x + y_a \vec{u}_y + z_a \vec{u}_z) \cdot (x_b \vec{u}_x + y_b \vec{u}_y + z_b \vec{u}_z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

► Produit scalaire et norme :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

► **Angle** entre deux vecteurs : $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$

► **Propriétés** : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$

e) Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes

- Avec les notations de la *figure 1.5* (a) nous pouvons écrire en utilisant le triangle rectangle (*OPM*) :

$$\cos\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos\theta \quad (1.3)$$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{\rho} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin\theta \quad (1.4)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \quad (1.5)$$

- En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.6)$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.7)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.8)$$



Si les coordonnées polaires (ρ, θ) sont connues on obtient les coordonnées cartésiennes en utilisant les relations (1.3) et (1.4).

Si les coordonnées cartésiennes (x, y) sont connues on obtient les coordonnées polaires en utilisant les relations (1.5), (1.6) (1.7) et (1.8).

- De même il est possible de passer d'une base d'un système de coordonnées à l'autre. En s'aidant de la *figure 1.5* (b) les composantes des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne sont :

$$\vec{u}_\rho = (\cos\theta) \vec{u}_x + (\sin\theta) \vec{u}_y \quad (1.9)$$

$$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta) \vec{u}_x + (\cos\theta) \vec{u}_y \quad (1.10)$$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\vec{u}_x = (\cos\theta) \vec{u}_\rho - (\sin\theta) \vec{u}_\theta \quad (1.11)$$

$$\vec{u}_y = (\sin\theta) \vec{u}_\rho + (\cos\theta) \vec{u}_\theta \quad (1.12)$$



Un moyen simple de retrouver rapidement les composantes d'un vecteur sur une base est d'utiliser les propriétés du produit scalaire (voir encart 1.2). En effet on peut écrire par exemple :

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_x : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x = \|\vec{u}_\rho\| \|\vec{u}_x\| \cos\theta = \cos\theta$$

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_y : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

On retrouve ainsi la relation (1.9).

Avec ses relations, il est toujours possible de passer d'un système de coordonnées à l'autre.



Si l'étude est effectuée en coordonnées cartésiennes seules doivent apparaître les grandeurs $(x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. En coordonnées polaires n'apparaîtront que les grandeurs $(\rho, \theta, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Il ne faut en aucun cas conserver des expressions comportant un mélange de ses grandeurs.

f) Le système de coordonnées cylindriques

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote).

La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ, θ) . La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z (voir figure 1.7).

La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$ suivant l'axe Oz .

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad (1.13)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (1.14)$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ, θ, z) . Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont $(\rho, 0, z)$ dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.



Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz , de rayon ρ d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire θ .

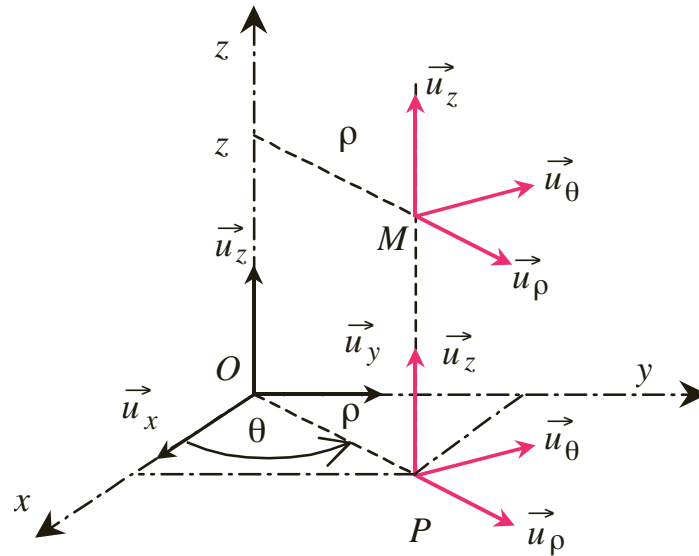


Figure 1.7 Le système de coordonnées cylindriques.

g) Base fixe et base mobile dans le référentiel d'étude

Dans le repère choisi du référentiel d'étude il est possible d'utiliser différentes bases.

- La base du système de coordonnées cartésiennes ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) est une base dite « fixe » c'est-à-dire que ces vecteurs gardent la même norme unitaire, la même direction et le même sens au cours du temps.

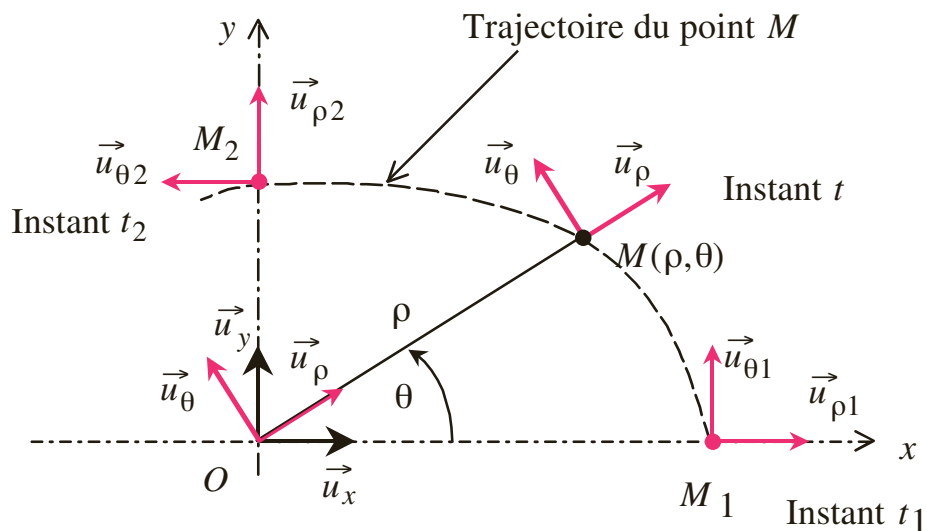


Figure 1.8 Représentation de la base polaire ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$) à différents instants au cours du mouvement d'un point M dans le plan.

- La base ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$) associée aux coordonnées polaires est dite « mobile ». Au cours du déplacement du point M dans le plan, le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ suivant OM change de direction ainsi que $\vec{u}_\theta$ (voir figure 1.8). Ces vecteurs, définis à partir du point M , peuvent

être représentés en n'importe quel point du plan. Par habitude ou commodité ils sont en général représentés en M ou bien en O . Cela signifie aussi que ces vecteurs ne peuvent subir que des rotations au cours du temps.

La *figure 1.8* représente la trajectoire d'un point M dans le plan. À l'instant t il se trouve au point de coordonnées polaires (ρ, θ) .

- À l'instant t_1 , M est en M_1 sur l'axe Ox , de coordonnées cartésiennes $(x, y) = (x_1, 0)$ et polaires $(\rho, \theta) = (\rho_1, \theta_1) = (x_1, 0)$.
- À l'instant t_2 , M est en M_2 sur l'axe Oy , de coordonnées cartésiennes $(x, y) = (0, y_2)$ et polaires $(\rho, \theta) = (\rho_2, \theta_2) = \left(y_2, \frac{\pi}{2}\right)$.

La base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est représentée à ces différents instants t , t_1 et t_2 . On constate alors qu'à l'instant t_1 , les vecteurs de base $(\vec{u}_{\rho 1}, \vec{u}_{\theta 1})$ se confondent avec la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. À l'instant t_2 , le vecteur $\vec{u}_\rho = \vec{u}_{\rho 2}$ correspond au vecteur $\vec{u}_y$ alors que le vecteur $\vec{u}_\theta = \vec{u}_{\theta 2} = \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}$ correspond au vecteur $(-\vec{u}_x)$.

En représentant ces vecteurs en un même point (voir *figure 1.9*), on constate bien la rotation des vecteurs de la base polaire. En considérant les expressions (1.9) et (1.10) ces vecteurs apparaissent bien comme une fonction de l'angle θ .

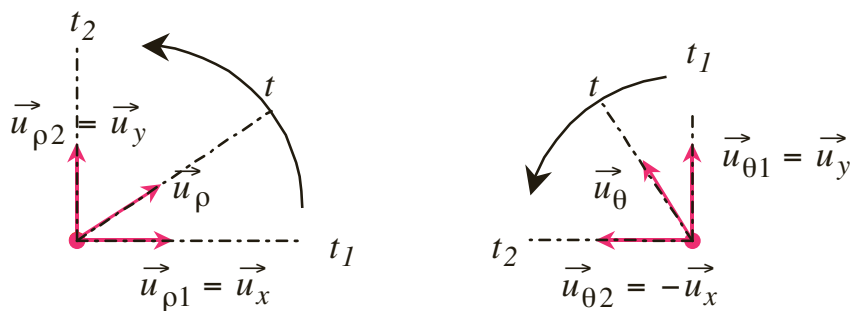


Figure 1.9 Rotation des vecteurs de la base polaire : représentation à différents instants définis sur la *figure 1.8*.

h) Choix du système de coordonnées



Le choix du système de coordonnées dépendra du type de mouvement du point mobile. Dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté. Ce ne sera plus le cas pour des mouvements curvilignes pour lesquels le système de coordonnées polaires ou cylindriques sera le plus souvent utilisé.



Exemple : trajectoire circulaire

On peut donner comme exemple le cas d'un mouvement circulaire. L'équation d'un cercle de centre O et de rayon R s'écrit en cartésienne :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad x \in [-R, R] ; y \in [-R, R]$$

En coordonnées polaires le même cercle se définit simplement par :

$$\rho = R$$

Cet exemple simple montre l'intérêt d'utiliser le système de coordonnées polaires.

1.3 VECTEUR VITESSE D'UN POINT

a) Vitesse moyenne

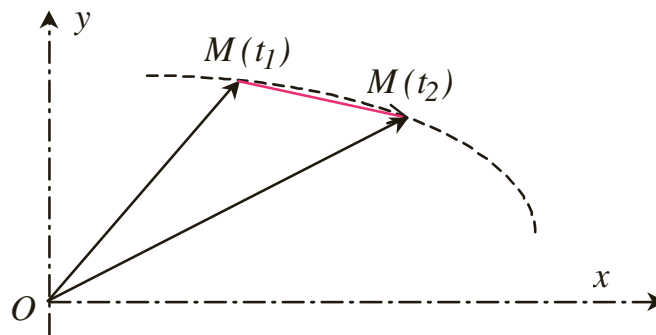


Figure 1.10 Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

- Le même déplacement d'un point M entre 2 positions peut se faire pendant des durées différentes. Pour caractériser un mouvement il peut être intéressant de connaître la distance parcourue par unité de temps c'est-à-dire la vitesse moyenne. Si la position du point mobile M à l'instant t_1 correspond au point $M(t_1) = M_1$ et à l'instant t_2 au point $M(t_2) = M_2$ le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} \quad (1.15)$$



Ce vecteur a pour direction et sens ceux du mouvement (de M_1 vers M_2). La norme renseigne sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps.

Une vitesse s'exprime, dans le système international, en mètre/seconde, symbole : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Vecteur vitesse instantanée

La vitesse instantanée (vitesse à un instant t , celle par exemple qui apparaît sur le compteur de vitesse d'un véhicule) peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position $M_1 = M(t)$ du point mobile à la date t et la position $M_2 = M(t + \Delta t)$ de ce même point à la date $t + \Delta t$ où Δt représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la vitesse instantanée à la date t que la durée Δt tend vers zéro. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \quad (1.16)$$

Lorsqu'on considère une durée *élémentaire* dt « infiniment petite » le point mobile passe d'une position M à une position M' « infiniment proche » de M . Le déplacement *élémentaire* correspondant peut s'écrire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$. La durée élémentaire est choisie suffisamment petite pour que la vitesse moyenne sur le déplacement élémentaire coïncide avec la vitesse instantanée. Avec ces notations, le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.17)$$

Lorsque le point M' tend vers le point M , la corde MM' tend vers la tangente à la trajectoire au point M . Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

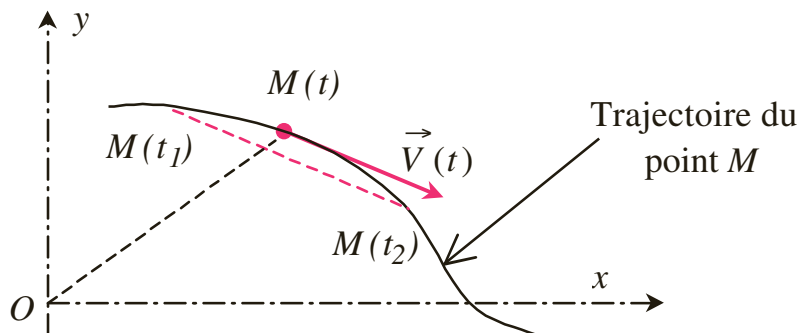


Figure 1.11 Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$ considéré.

La durée *élémentaire* dt correspond à la différence entre 2 dates infiniment proches et s'appelle aussi la *différentielle* de la variable t .

De même, le vecteur $d\overrightarrow{OM}$, noté aussi $d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{l}$ est le résultat de la différence entre 2 vecteurs position infiniment proches et s'appelle la *différentielle* du vecteur position. Il correspond aussi à ce qu'on nomme un déplacement *élémentaire* (infiniment petit ou aussi petit que nécessaire). À partir de la définition (1.17) du vecteur vitesse instantanée le déplacement *élémentaire* s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) \cdot dt = d\overrightarrow{l} \quad (1.18)$$

c) Expression en coordonnées cartésiennes

À partir de l'expression (1.1) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et de la définition (1.17) du vecteur vitesse $\vec{V}$ on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d[x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z]}{dt} \quad (1.19a)$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme l'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d(x\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(y\vec{u}_y)}{dt} + \frac{d(z\vec{u}_z)}{dt} \quad (1.19b)$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont des vecteurs indépendants du temps. Si le point M est mobile, seules les composantes x , y et z sont des fonctions du temps : $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. L'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \quad (1.19c)$$



Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable X par rapport au temps t » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc.

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} ; \frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X} \quad (1.20)$$

Avec cette convention, le vecteur vitesse s'écrit en cartésienne :

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (1.21a)$$

$$\vec{V}(V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}) \quad (1.21b)$$

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (1.21c)$$

d) Expression en coordonnées polaires

Dérivation du vecteur position et vitesse angulaire

Lorsque le point se déplace dans un plan il est possible de choisir le système de coordonnées polaires. La base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est alors une base « mobile » : les vecteurs sont en rotation dans le plan (O, x, y) et sont donc des fonctions du temps. À partir de l'expression (1.2) du vecteur position $\vec{OM}$ et de la définition (1.17) du vecteur vitesse $\vec{V}$ on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d[\rho \vec{u}_\rho]}{dt} \quad (1.22)$$

En appliquant la règle de dérivation d'un produit de fonction on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \quad (1.23)$$

Lorsque le point M est en mouvement, l'angle polaire $\theta = \theta(t)$ est une fonction du temps. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ tourne alors au cours du temps et est donc fonction du temps par l'intermédiaire de l'angle. Pour dériver ce vecteur par rapport au temps il faut appliquer les règles de dérivation d'une fonction composée. Si $f = f(y)$ est une fonction de y et $y = y(x)$ une fonction de x , on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (1.24)$$

Dans notre cas, la variable y correspond à l'angle polaire θ et x à la variable temps t . On aura donc :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \quad (1.25)$$

La quantité $\dot{\theta}$ caractérise la variation de l'angle polaire au cours du temps et correspond à la définition de la vitesse angulaire. Elle est souvent notée ω (lettre grecque *oméga*) et s'exprime en radian/seconde ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

Il reste à exprimer la dérivée du vecteur unitaire (norme constante égale à 1) par rapport à l'angle polaire.

Encart 1.3 Vecteur vitesse et la base de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan, et en définissant en tout point M un vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté comme celle-ci, le vecteur vitesse, lui-même tangent à la trajectoire au point M (voir *figure 1.12*), peut s'écrire :

$$\vec{V}(t) = v \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\| = V = |v|$$

La notation V correspond à la valeur de la vitesse (grandeur positive). La notation v correspond à la valeur algébrique de la vitesse. Le signe de v indique dans quel sens le point se déplace sur la trajectoire: v est positif pour un déplacement dans le sens positif et négatif dans le cas contraire.

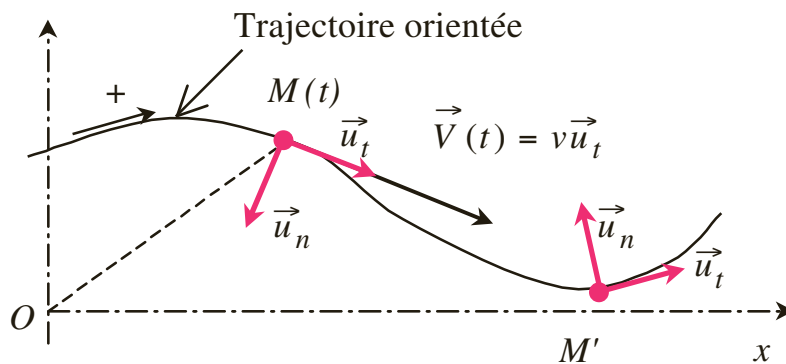


Figure 1.12 Vecteur vitesse et la base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$.

Pour obtenir une nouvelle base dans le plan, il suffit de définir un vecteur unitaire $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_t$: $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ s'appelle la base de Frenet. Le vecteur $\vec{u}_t$ est tangent à la trajectoire dans le sens positif choisi et le vecteur $\vec{u}_n$ est normal à la trajectoire et toujours tourné vers la concavité (voir *figure 1.12*). Cette base est une base mobile dans le référentiel d'étude puisque la direction des vecteurs de base dépend du point considéré sur la trajectoire (voir *figure 1.12*). Elle peut être pratique d'utilisation si la trajectoire est connue.

Dérivation d'un vecteur tournant de norme constante

D'après les relations (1.9) et (1.10) les vecteurs de la base polaire apparaissent comme des fonctions de l'angle polaire θ . Il est possible alors de les dériver par rapport à cet angle. L'application des règles de dérivation donne :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d[(\cos\theta)\vec{u}_x + (\sin\theta)\vec{u}_y]}{d\theta} \quad (1.26)$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d[(\cos\theta)\vec{u}_x]}{d\theta} + \frac{d[(\sin\theta)\vec{u}_y]}{d\theta} \quad (1.27)$$

Les vecteurs de la base cartésienne étant indépendants de l'angle polaire il suffit de dériver uniquement les composantes :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\vec{u}_x + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\vec{u}_y \quad (1.28)$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = (-\sin\theta)\vec{u}_x + (\cos\theta)\vec{u}_y \quad (1.29)$$

En comparant ce résultat avec l'expression (1.10), on reconnaît le vecteur de base $\vec{u}_\theta$ qui est directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\rho$:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad (1.30)$$

De même on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d[(-\sin\theta)\vec{u}_x + (\cos\theta)\vec{u}_y]}{d\theta} \quad (1.31)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = (-\cos\theta)\vec{u}_x + (-\sin\theta)\vec{u}_y = -\vec{u}_\rho \quad (1.32)$$

Cette fois on reconnaît l'opposé du vecteur de base $\vec{u}_\rho$ qui est directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\theta$:

On en déduit la règle suivante :

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire :

La dérivée par rapport à l'angle polaire θ d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ (qui ne dépend que de l'angle θ) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

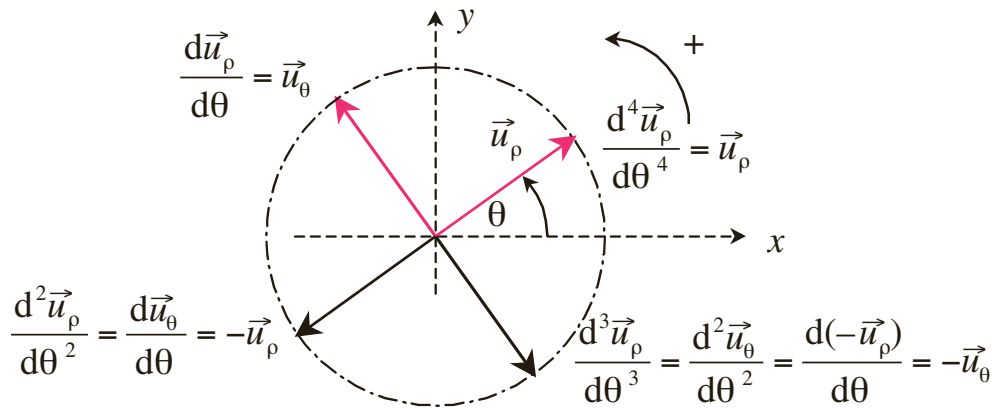


Figure 1.13 Dérivation successive par rapport à l'angle polaire d'un vecteur unitaire. Chaque dérivation fait tourner le vecteur d'un angle droit. Pour un vecteur de norme constante le résultat est le même.

 Exemple : $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$; $\frac{d^2\vec{u}_\rho}{d\theta^2} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho$; etc.

 Un vecteur unitaire dérivé 4 fois de suite par rapport à l'angle redonne ce vecteur (voir figure 1.13).

Ce résultat est valable aussi pour un vecteur $\vec{X}$ de norme constante quelconque $\|\vec{X}\| = X$ et tournant dans le plan.

En notant $\vec{Y}$ la dérivée du vecteur $\vec{X}$ on aura :

$$\frac{d\vec{X}}{d\theta} = \vec{Y} \perp \vec{X} \text{ et } \left\| \frac{d\vec{X}}{d\theta} \right\| = \|\vec{Y}\| = Y = X$$

Dérivation par rapport au temps du vecteur unitaire tournant

D'après les relations (1.25) et (1.30) on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \quad (1.33)$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport au temps :

La dérivée par rapport au temps t d'un vecteur $\vec{u}$ de norme constante est un vecteur dont la norme est obtenue en multipliant celle de $\vec{u}$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ et qui est directement perpendiculaire à $\vec{u}$ (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta ; \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho \quad (1.34)$$

Pour un vecteur tournant $\vec{X}$ de norme constante, sa dérivée $\dot{\vec{X}}$ par rapport au temps est telle que :

$$\dot{\vec{X}} \perp \vec{X} \text{ (les 2 vecteurs sont perpendiculaires)} \quad (1.35a)$$

$$\|\dot{\vec{X}}\| = \dot{\theta} \|\vec{X}\| = \omega X \quad (1.35b)$$



Ne pas oublier de multiplier par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ lorsqu'on dérive par rapport au temps.

Expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires

En reprenant l'expression (1.23) de la vitesse et en utilisant le résultat (1.33) de la dérivation du vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$, on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (1.36a)$$

$$\vec{V}(V_\rho = \dot{\rho} ; V_\theta = \rho \dot{\theta}) \quad (1.36b)$$

où V_ρ et V_θ sont respectivement les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse dans la base polaire.

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2} \quad (1.36c)$$

e) Expression en coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) auxquelles on ajoute une coordonnée z suivant un axe perpendiculaire au plan. La base associée est donc composée de la base tournante $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ et du vecteur $\vec{u}_z$ (3^e vecteur de la base cartésienne) qui est un vecteur « fixe » dans le référentiel d'étude.

En dérivant l'expression (1.13) du vecteur position et en tenant compte des résultats obtenus en cartésienne et en polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z)}{dt} \quad (1.37a)$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(z \vec{u}_z)}{dt} \quad (1.37b)$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad (1.37c)$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z \quad (1.38)$$

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (1.39)$$

f) Vecteur vitesse angulaire

Lorsqu'un point M se déplace dans l'espace, les vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ sont des vecteurs tournant dans le plan (O, x, y) avec la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. De façon générale, pour caractériser la rotation d'un vecteur tournant dans un plan il faut pouvoir définir ce plan et la valeur de la vitesse angulaire instantanée.

Pour définir un plan il suffit de se donner un vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan. Le sens de ce vecteur définira le sens positif des rotations dans le plan correspondant avec la règle habituelle du « tire-bouchon » (voir *figure 1.14*).

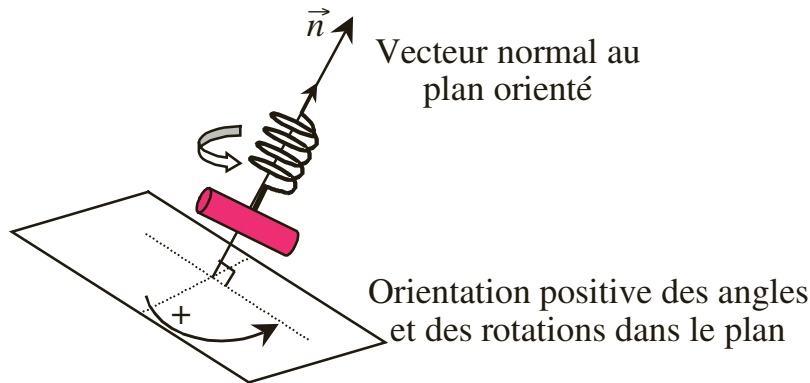


Figure 1.14 Orientation des rotations dans un plan et vecteur normal à ce plan : règle du « tire-bouchon ». Le sens positif de rotation dans le plan est celui qu'il faut donner au tire-bouchon (ou à une vis) pour qu'il se dirige suivant le vecteur unitaire normal au plan.

Dans un repère orthonormé direct, le sens positif de rotation dans le plan (O, x, y) est le sens trigonométrique c'est-à-dire de l'axe Ox vers l'axe Oy . L'application de la règle du tire-bouchon donne $\vec{u}_z$ comme vecteur normal à ce plan. Les vecteurs de bases $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forme alors un trièdre direct (règle des trois doigts de la main droite voir encart 1.5).

Le vecteur vitesse angulaire caractérisant la rotation des vecteurs de la base polaire est donc un vecteur suivant l'axe Oz et de module correspondant à la valeur algébrique de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ (une valeur positive donne une rotation dans le sens positif).

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \dot{\theta} \vec{u}_z \quad (1.40)$$



Considérons un point M se déplaçant dans le plan (O, x, y) . Le vecteur vitesse (instantanée) $\vec{V}(t)$ est un vecteur dans ce plan alors que le vecteur vitesse angulaire (instantanée) $\vec{\omega}(t)$ est un vecteur perpendiculaire à ce plan. Bien faire la distinction entre ces deux grandeurs.

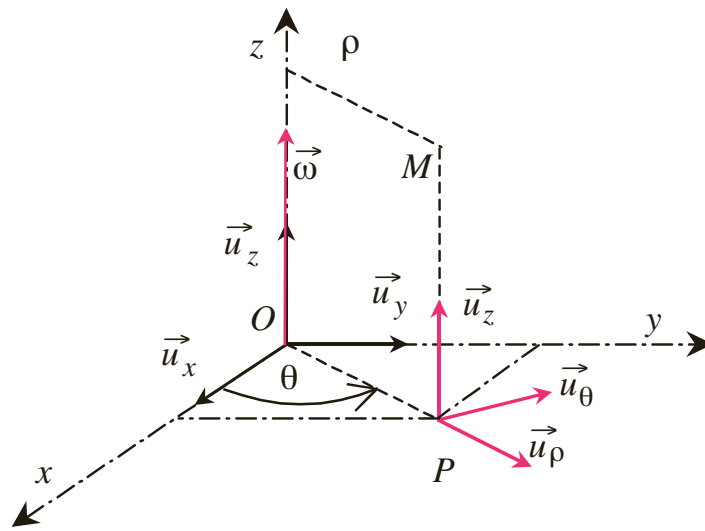


Figure 1.15 Rotation des vecteurs de la base polaire dans le plan (O, x, y) lorsque le point mobile M se déplace. Le vecteur vitesse angulaire est un vecteur suivant l'axe Oz orienté comme $\vec{u}_z$ et de module égal à $\dot{\theta}$: $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$.

g) Vecteur déplacement élémentaire

Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM} = d\vec{l}$ peut s'écrire en utilisant les relations (1.18) et (1.19c) :

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (1.41)$$

$$\vec{V}(t)dt = d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z \quad (1.42)$$



Le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes correspond donc à un déplacement élémentaire dx suivant la direction $\vec{u}_x$ puis un déplacement élémentaire dy suivant la direction $\vec{u}_y$ (voir figure 1.16) et enfin un déplacement élémentaire dz suivant la direction $\vec{u}_z$.

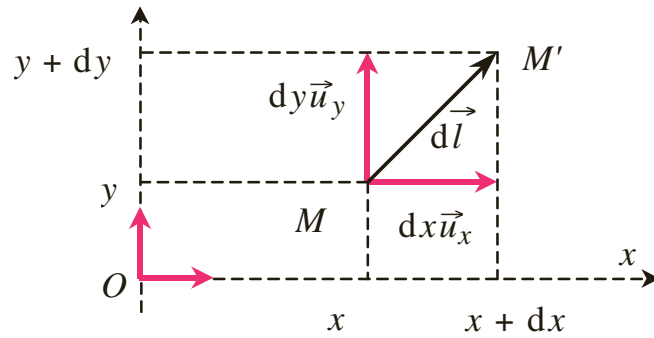


Figure 1.16 Déplacement élémentaire dans le plan en coordonnées cartésiennes.

Pour obtenir l'expression du vecteur déplacement élémentaire dans le plan en coordonnées polaires on peut pratiquer de la même façon en reprenant l'expression (1.23) du vecteur vitesse :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (1.43)$$

$$\vec{V}(t)dt = d\vec{l} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta \quad (1.44)$$

Un vecteur élémentaire quelconque $d\vec{l}$ fait passer un point M de coordonnées (ρ, θ) à un point voisin M' de coordonnées $(\rho' = \rho + d\rho, \theta' = \theta + d\theta)$. Il se décompose sur la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ en deux déplacements élémentaires (voir *figure 1.17*) :

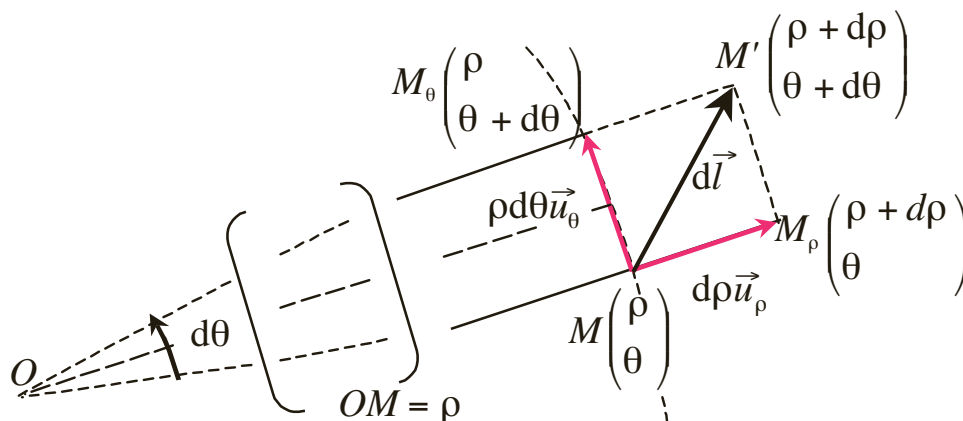


Figure 1.17 Déplacement élémentaire dans le plan en coordonnées polaires.

- Un déplacement élémentaire radial $\overrightarrow{MM}_\rho$ suivant $\vec{u}_\rho$ (θ restant constant) qui augmente la distance ρ d'une quantité infinitésimale $d\rho$. La coordonnée radiale passe de la valeur ρ à $\rho + d\rho$. On a donc : $\overrightarrow{MM}_\rho = d\rho \vec{u}_\rho$

- Un déplacement élémentaire orthoradial $\overrightarrow{MM_\theta}$ suivant $\vec{u}_\theta$ (le rayon ρ restant constant). Ce déplacement est le résultat d'une rotation d'un angle élémentaire $d\theta$. Il correspond à la mesure de l'arc de cercle $\rho d\theta$ (produit du rayon par l'angle correspondant). Cet arc de cercle infiniment petit se confond avec la corde et la tangente au point considéré. La coordonnée orthoradiale passe de la valeur θ à la valeur $\theta + d\theta$. On a donc : $\overrightarrow{MM_\theta} = \rho d\theta \vec{u}_\theta$
- Pour un déplacement élémentaire dans l'espace en coordonnées cylindrique il suffit d'ajouter à l'expression du déplacement élémentaire en polaire le déplacement élémentaire dz suivant la direction $\vec{u}_z$.

$$\vec{V}(t)dt = d\vec{l} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad (1.45)$$

1.4 VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN POINT

a) Définition

Tout comme le vecteur vitesse qui rend compte de la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération va rendre compte des variations du vecteur vitesse par rapport au temps. Le vecteur accélération correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (1.46)$$

Le vecteur accélération correspond à la variation du vecteur vitesse par unité de temps. L'accélération s'exprime, dans le système international, en mètres divisés par des secondes au carré : symbole $m \cdot s^{-2}$.

b) Expression en coordonnées cartésiennes

À partir de l'expression (1.21) du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de la définition (1.46) du vecteur accélération $\vec{a}$ on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z]}{dt} \quad (1.47)$$

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{x}\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(\dot{y}\vec{u}_y)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\vec{u}_z)}{dt} \quad (1.48)$$

Les vecteurs de la base cartésiennes sont des vecteurs indépendants du temps.

L'expression devient :

$$\vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z \quad (1.49)$$

En utilisant la convention (1.20), l'expression devient :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (1.50)$$

On peut encore écrire :

$$\vec{a} (a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} ; a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} ; a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}) \quad (1.50b)$$

c) Expression en coordonnées polaires

À partir de l'expression (1.33) du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de la définition (1.46) du vecteur accélération $\vec{a}$ on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} \quad (1.51)$$

$$\vec{a} = \frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho]}{dt} + \frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} \quad (1.52)$$

La base polaire étant une base mobile dans le référentiel d'étude, le premier terme est *a priori* un produit de 2 fonctions du temps et le deuxième terme un produit de 3 fonctions du temps.

En appliquant les règles de dérivation d'un produit de fonctions, le premier terme donne :

$$\frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho]}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \quad (1.53)$$

En appliquant la règle de dérivation d'un vecteur tournant (1.32) ce premier terme s'écrit :

$$\frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho]}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \quad (1.54)$$

$$\frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho]}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (1.55)$$

En pratiquant de même avec le deuxième terme, on peut écrire :

$$\frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad (1.56)$$

En utilisant le résultat (1.33) donnant la dérivée des vecteurs de la base polaire, en utilisant la notation avec des points pour les dérivées par rapport au temps et en regroupant les 2 premiers termes, on a :

$$\frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} = (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho) \quad (1.57)$$

$$\frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} = (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho \quad (1.58)$$

L'expression finale est obtenue en ajoutant les deux expressions (1.55) et (1.58) :

$$\vec{a} = [\ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta] + [(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho] \quad (1.59)$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (1.60)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (1.61)$$

$$\vec{a} = a_\rho\vec{u}_\rho + a_\theta\vec{u}_\theta \quad (1.62)$$

Le premier terme ($a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$) correspond à la composante radiale de l'accélération, le second ($a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$) à l'accélération orthoradiale.



Cette expression est plus difficile à retenir que celle obtenue en coordonnées cartésiennes. Pour cette raison il faut savoir la retrouver très rapidement en dérivant successivement le vecteur position puis le vecteur vitesse.

d) Expression en coordonnées cylindriques

Il suffit de rajouter la composante $\ddot{z}$ suivant $\vec{u}_z$ correspondant à la dérivée par rapport au temps de la composante $\dot{z}$ du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (1.64)$$

Encart 1.4 Vecteur accélération et la base de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan, il est possible d'exprimer le vecteur accélération en utilisant la base de Frenet définie dans l'encart 1.3. Le vecteur vitesse a alors pour expression :

$$\vec{V}(t) = v \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\| = V = |v|$$

Le vecteur accélération peut s'écrire :

$$\vec{a}(t) = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n \quad (1.63)$$

La composante a_t est la composante tangentielle et a_n est la composante normale centripète. La dérivée du vecteur vitesse dans cette base conduit au résultat suivant :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (\text{dérivée de la valeur algébrique de la vitesse})$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (\text{vitesse au carré divisée par le rayon de courbure } R)$$

Le rayon de courbure correspondant au rayon du cercle tangent à la trajectoire au point considéré. La composante a_n est toujours positive et donc le vecteur accélération est toujours tourné vers la concavité (voir *figure 1.18*)

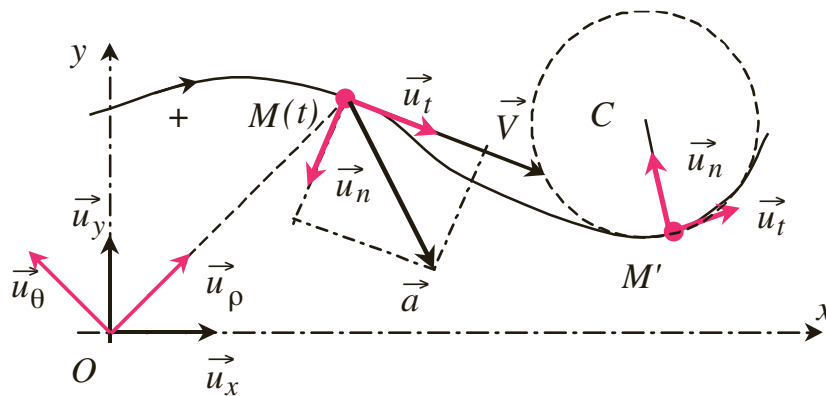


Figure 1.18 Le vecteur accélération et la base de Frenet ($\vec{u}_t, \vec{u}_n$). Le rayon de courbure en M' correspond au rayon CM' du cercle tangent à la trajectoire au point M' considéré. Les bases polaire et cartésienne sont représentées au point O pour mettre en évidence les différences avec la base de Frenet.

1.5 EXEMPLES DE MOUVEMENT

a) Définitions

Équations horaires du mouvement :

Ce sont les fonctions $\{x(t), y(t), z(t)\}$ ou $\{\rho(t), \theta(t), z(t)\}$



Exemple n°1 (en cartésienne) : $x(t) = v_o t$; $y(t) = \frac{1}{2} a_o t^2$; $z(t) = 0$

Exemple n°2 (en cylindrique) : $\rho(t) = R$; $\theta(t) = \omega t$; $z(t) = 0$

Équation de la trajectoire :

C'est la relation liant x , y et z ou liant ρ et θ et z indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.



Exemple n°1 : Pour tout t , $z(t) = 0$ donc le mouvement se fait dans le plan (O, x, y) . On exprime t en fonction de x et on reporte dans l'expression de y :

$$x(t) = v_o t \Rightarrow t = \frac{x}{v_o} \text{ et } y(t) = \frac{1}{2} a_o t^2 = \frac{1}{2} a_o \left(\frac{x}{v_o} \right)^2. \text{ On a donc : } y = \frac{1}{2} a_o \frac{x^2}{v_o^2}$$

(mouvement parabolique dans le plan $z = 0$)

Exemple n°2 : Pour tout t , $z(t) = 0$ donc le mouvement se fait dans le plan (O, x, y) . Pour tout t , $\rho(t) = R$ (une constante) : Ceci correspond, en coordonnées polaires, à l'équation d'un cercle de centre O et de rayon R .

Équation différentielle :

C'est une équation reliant une fonction (par exemple $x(t)$) avec ses dérivées.



Exemples : $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$; $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$; etc...

b) Mouvements rectilignes

Dans le référentiel d'étude, la trajectoire est une portion de droite. Il est évident alors de repérer le point M sur cette droite confondue, par exemple, avec l'axe Ox des coordonnées cartésiennes. Il n'y a alors qu'une équation horaire $x(t)$ et une seule composante pour les vecteurs vitesse ($\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = v \vec{u}_x$) et accélération ($\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x = a \vec{u}_x$).

Pour simplifier les expressions, on choisit souvent comme origine O du repère la position du point M à l'instant $t = 0$ (condition initiale).

Mouvement rectiligne uniforme :

$$\text{Vecteur vitesse constant} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}_o = V_o \vec{u}_x$$

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes, on obtient : $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = V_o \vec{u}_x$.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\dot{x} = V_o$

En dérivant on obtient une accélération nulle : $a = \ddot{x} = 0$.

Pour obtenir l'équation horaire il suffit de trouver la primitive d'une constante : $\dot{x} = V_o \Rightarrow x(t) = V_o t + x_o$

La grandeur x_o est une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales. Avec la condition initiale $x(t = 0) = 0$ on obtient $x_o = 0$. L'équation horaire est alors : $x(t) = V_o t$.



Cette relation entre vitesse, temps et position n'est vraie que pour le mouvement rectiligne uniforme.

Rectiligne uniformément varié :

$$\vec{a}(t) = \text{cste} = \vec{a}_o = a_o \vec{u}_x \Rightarrow \ddot{x} = a_o \text{ et } \underline{\text{trajectoire rectiligne.}}$$

L'équation différentielle du mouvement est tout simplement : $\ddot{x} = a_o$

Pour obtenir la vitesse, il faut intégrer la constante soit :

$$v(t) = \dot{x} = \int a_o dt = a_o t + v_o \text{ où } v_o \text{ est une constante.}$$

Pour obtenir l'équation horaire $x(t)$ il faut intégrer $v(t)$:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (a_o t + v_o) dt = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o$$

Les constantes x_o et v_o sont déterminées par 2 conditions ou par les conditions initiales (conditions à $t = 0$). Par exemple, si à $t = 0$, le point M est en O sans vitesse, on aura les conditions $v(t = 0) = 0$ et $x(t = 0) = 0$. En reportant dans les expressions de la vitesse et position on obtient très simplement $v_o = 0$ et $x_o = 0$ soit alors l'équation horaire

$$x(t) = \frac{1}{2} a_o t^2$$



$\vec{a}(t) = \vec{a}_o$ vecteur constant ne suffit pas pour dire que le mouvement est rectiligne uniformément varié. En effet on a alors :

$\vec{a}(t) = \vec{a}_o = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}_o t + \vec{v}_o$. Si le vecteur vitesse $\vec{v}_o$ à $t = 0$ n'est pas suivant la direction du vecteur accélération le mouvement sera plan, dans le plan contenant $\vec{v}_o$ et $\vec{a}_o$ (voir par exemple le mouvement de chute parabolique). Il faut donc rajouter une condition : soit dire que le mouvement est rectiligne soit préciser qu'à un instant t quelconque vecteur accélération et vecteur vitesse sont colinéaires.

Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur vitesse est une fonction croissante de t , soit v^2 fonction croissante. La dérivée de v^2 doit donc être positive. La condition sera :

$$\frac{dv^2}{dt} > 0 \Rightarrow 2 \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \Rightarrow \dot{x} \cdot \ddot{x} > 0 \quad (1.64)$$



L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération permettra de préciser si le mouvement est accéléré ($\dot{x}\ddot{x} > 0$) ou retardé ($\dot{x}\ddot{x} < 0$).

En exprimant le temps t en fonction de la vitesse et en reportant dans l'expression de $x(t)$ il est possible d'obtenir une relation entre position et vitesse indépendamment du temps :

$$v(t) = \dot{x} = \int a_o dt = a_o t + v_o \Rightarrow \frac{(v - v_o)}{a_o} = t$$

$$x - x_o = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t = \frac{1}{2} \frac{(v - v_o)^2}{a_o} + \frac{v_o}{a_o} (v - v_o)$$

$$2a_o(x - x_o) = (v - v_o)^2 + 2v_o(v - v_o)$$

$$2a_o(x - x_o) = v^2 - v_o^2$$

Rectiligne quelconque :

L'accélération est une fonction quelconque du temps. En intégrant une première fois cette fonction, on obtient la vitesse à une constante près. En l'intégrant une deuxième fois on obtient l'équation horaire.

$$a = \ddot{x} = f(t) \Rightarrow v(t) = \dot{x} = \int f(t) dt \Rightarrow x(t) = \int v(t) dt$$

Les constantes d'intégration se déterminent suivant les conditions initiales (vitesse et position à $t = 0$) ou à un instant t quelconque.

Rectiligne sinusoïdal :

L'équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps du type :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

C'est le mouvement par exemple d'une masse accrochée à un ressort.

- La quantité ω s'appelle la pulsation (unité en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, homogène à l'inverse d'un temps). Attention, ce n'est pas une vitesse angulaire même si l'unité est identique
- X_m est l'amplitude maximale du mouvement d'oscillation du point M autour du point O . La fonction cosinus variant entre -1 et $+1$, x oscille entre $-X_m$ et X_m
- $\Phi(t) = (\omega t + \varphi)$ est la phase à l'instant t
- φ est la phase à l'origine (à $t = 0$)

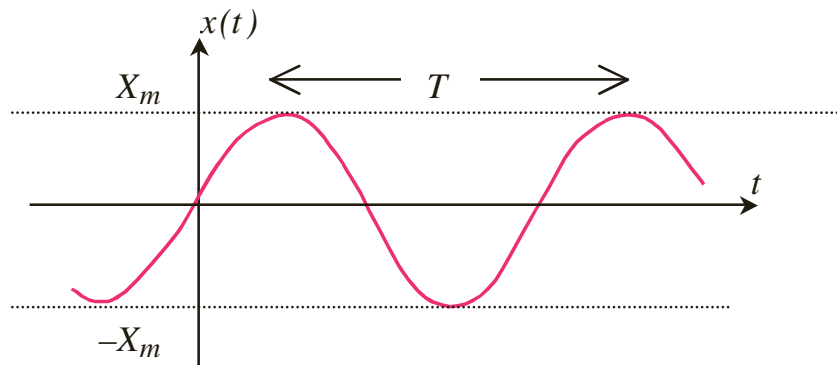


Figure 1.19 Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

- La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π . Si T est la période temporelle du mouvement, on aura donc : $x(t) = x(t + T)$ soit $\Phi(t + T) - \Phi(t) = 2\pi$. Cela conduit à :

$$[\omega(t + T) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

- La fréquence f correspond au nombre d'oscillations (d'aller et retour) par seconde. On a donc $f = 1/T$

La vitesse est obtenue en dérivant la fonction $x(t)$:

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dt} = v = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

L'accélération est obtenue en dérivant la fonction $v(t)$:

$$v = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = a(t) = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

On constate que l'accélération peut s'exprimer en fonction de $x(t)$. La relation est : $a(t) = \ddot{x}(t) = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Ceci correspond à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.



La solution de cette équation différentielle peut s'écrire de différentes façons, toutes équivalentes. On a :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \sin(\omega t + \varphi') = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

En utilisant les relations trigonométriques usuelles, on obtient très simplement :

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} ; A = -X_m \sin \varphi ; B = X_m \cos \varphi .$$

c) Mouvements circulaires

La trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre O et son rayon R . Il est alors logique de choisir l'origine du repère en centre du cercle et l'axe Oz perpendiculaire au plan contenant la trajectoire. Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement.

Les équations horaires du mouvement peuvent s'écrire :

$$\rho = R = \text{constante} \quad \text{et} \quad \theta = \theta(t)$$

La forme de la fonction $\theta(t)$ qualifiera le type de mouvement circulaire. Suivant la forme de la fonction $\theta(t)$ le mouvement sera dit circulaire et :

- Uniforme si $\theta(t) = \omega_o t + \theta_o$ avec $\dot{\theta} = \omega_o = \text{constante}$
- Uniformément varié (accéléré ou décéléré) si $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_o = \text{constante}$

$$\text{soit } \dot{\theta} = \omega = \ddot{\theta}_o t + \dot{\theta}_o \quad \text{et} \quad \theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_o t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$$

- Sinusoïdal si $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \varphi)$

Mouvement circulaire quelconque

Les caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire peuvent se déduire du schéma présenté sur la *figure 1.20* et sont données par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (\rho \cos \theta) \vec{u}_x + (\rho \sin \theta) \vec{u}_y$$

ou

$$(1.65)$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \vec{u}_\rho(t) = R \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = R \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \quad (1.66)$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega(t)\vec{u}_\theta$$

Ce résultat peut se retrouver en utilisant l'expression (1.36) de la vitesse en coordonnées polaires en posant $\rho = R = \text{constante}$.

La dérivée du vecteur vitesse fait apparaître deux termes. On a :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = R \frac{d(\omega\vec{u}_\theta)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta + R\omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ \vec{a} &= R\dot{\omega}\vec{u}_\theta + R\omega(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho) \\ \vec{a} &= -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta \end{aligned} \quad (1.67)$$



Le vecteur unitaire orthoradiale $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire au rayon OM et est donc tangent à la trajectoire. Dans ce cas, en orientant la trajectoire dans le sens trigonométrique, il correspond au vecteur $\vec{u}_t$ de la base de Frenet définie dans l'encart 1.3 et 1.4. Le deuxième vecteur $\vec{u}_n$ de cette base est toujours tourné vers la concavité et est donc opposé au vecteur $\vec{u}_\rho$. On a donc :

$$\vec{u}_t = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{u}_n = -\vec{u}_\rho$$

Ce résultat n'est vrai que pour une trajectoire circulaire (voir *figure 1.18* de l'encart 1.4 mettant en évidence les différences entre les deux bases).

On retrouve l'expression de la valeur algébrique v de la vitesse :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = R\omega\vec{u}_\theta \Rightarrow v = R\omega \quad (1.68)$$

L'expression du vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet (encart 1.4) :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n \quad (1.69)$$

La comparaison entre l'expression (1.69) obtenue dans la base de Frenet et (1.67) obtenue dans la base polaire permet d'écrire :

► Composante radiale ou accélération normale $\vec{a}_n$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = R\omega^2\vec{u}_n = -R\omega^2\vec{u}_\rho \quad (1.70)$$

Le terme $(R\omega^2)$ étant positif, on constate que cette accélération est toujours dirigée vers le centre du cercle : c'est la composante normale centripète. C'est elle « qui fait tourner » c'est-à-dire qui rend compte de la variation de la direction du vecteur vitesse. Même si le mouve-

ment est uniforme (v et ω constantes) cette accélération existe nécessairement.

► Composante orthoradiale ou tangentielle $\vec{a}_t$

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta = \frac{d(R\omega)}{dt}\vec{u}_\theta \\ \vec{a}_t &= \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t\end{aligned}\quad (1.71)$$

Cette accélération indique si la valeur de la vitesse varie ou pas. Dans le cas du mouvement circulaire uniforme il est nul. La figure 1.20 représente les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire quelconque. Dans le cas où l'accélération tangentielle est dirigée comme le vecteur vitesse le mouvement est accéléré (voir 1.64). Dans le cas contraire le mouvement serait freiné.

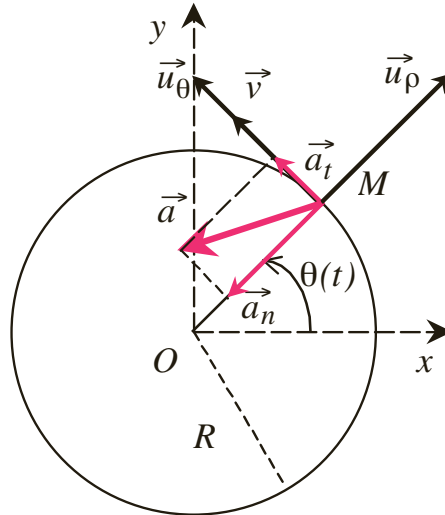


Figure 1.20 Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire quelconque.

Mouvement circulaire uniforme

Dans ce cas, la vitesse angulaire de rotation est constante et l'équation différentielle du mouvement est donnée par

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = \omega_o = cste \quad (1.72)$$

L'équation horaire est obtenue par intégration. Si $\theta(t=0) = \theta_o$ à l'instant initial alors on peut écrire :

$$\theta = \omega_o t + \theta_o \quad (1.73)$$

Les expressions (1.65) et (1.66) sont inchangées :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \vec{u}_\rho(t) = R \vec{u}_\rho \quad (1.74)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = R\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega_o\vec{u}_\theta \quad (1.75)$$

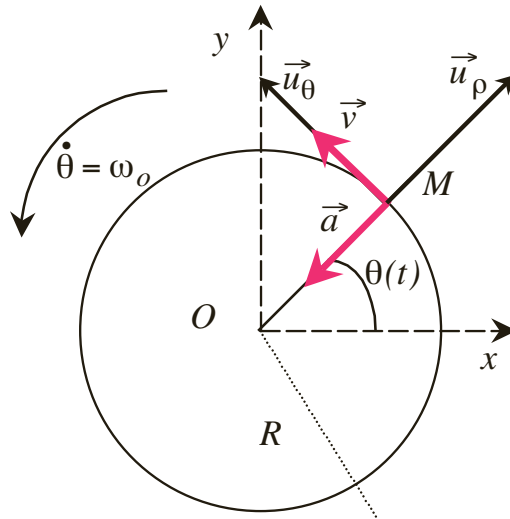


Figure 1.21 Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

L'expression (1.67) du vecteur accélération se simplifie. La vitesse angulaire étant constante la composante tangentielle du vecteur accélération est nulle. Il ne reste que la composante normale :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\omega_o\vec{u}_\theta)}{dt} = R\omega_o\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad (1.76a)$$

$$\vec{a} = R\omega_o(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho) = -R\omega_o^2\vec{u}_\rho \quad (1.76b)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = R\omega_o^2\vec{u}_n = -R\omega_o^2\vec{u}_\rho \quad (1.76c)$$



Le mouvement circulaire *uniforme* est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. *Uniforme* ne veut donc pas dire *accélération nulle*.

La figure 1.21 représente les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire uniforme.

Expressions générales des vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire



Il est possible d'exprimer les vecteurs vitesse et accélération en introduisant le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ (voir expression 1.40).

En effet, en remarquant que : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$ (voir encart 1.5 sur le produit vectoriel) on peut donner une expression du vecteur vitesse indépendante de la base choisie. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\omega \vec{u}_\theta = R\omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \omega \vec{u}_z \wedge R\vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\end{aligned}\quad (1.77)$$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur de norme constante (rayon R du cercle) qui tourne. La dérivée de ce vecteur (voir expression (1.35a) et (1.35b)) est un vecteur qui lui est directement perpendiculaire et dont la norme a été multipliée par la vitesse angulaire. L'expression (1.77) permet d'exprimer cette dérivée indépendamment de la base choisie.

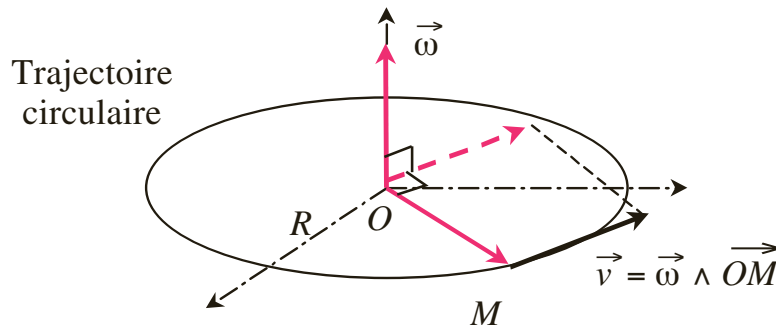


Figure 1.22 Lien entre vecteur vitesse $\vec{v}$ et vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Cette relation est valable pour tout vecteur de norme constante et en rotation. En particulier on peut écrire (voir 1.33) :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho \quad (1.78)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho = -\omega(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) \quad (1.79)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

Pour un vecteur $\vec{X}$ de norme $\|\vec{X}\| = X = \text{constante}$ et tournant avec la vitesse angulaire ω (dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{\omega}$) :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X} \quad (1.80)$$

Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire.

La même règle peut être utilisée pour déterminer le vecteur accélération :

► Composante radiale $\vec{a}_n$ (1.70)

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= -R\omega^2 \vec{u}_\rho = R\omega^2 (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = R\omega^2 [\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho)] \\ \vec{a}_n &= \omega \vec{u}_z \wedge (\omega \vec{u}_z \wedge R\vec{u}_\rho) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ \vec{a}_n &= \vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{aligned} \quad (1.81)$$

En utilisant la relation (1.77) on peut encore écrire :

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \quad (1.82)$$

► Composante orthoradiale $\vec{a}_t$ (1.71)

$$\begin{aligned} \vec{a}_t &= R\dot{\omega} \vec{u}_\theta = R \frac{d\omega}{dt} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) \\ \vec{a}_t &= \frac{d(\omega \vec{u}_z)}{dt} \wedge R\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \end{aligned} \quad (1.83)$$

► Le vecteur accélération $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \vec{a} &= [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Ce résultat peut être obtenu directement en dérivant le vecteur vitesse exprimé sous forme d'un produit vectoriel et en appliquant la règle habituelle de dérivation d'un produit de fonction :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Encart 1.5 Le produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération entre deux vecteurs :
le résultat est un vecteur.

Notation : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme un trièdre direct comme $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Le sens est donné par la règle du tire-bouchon (on tourne $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ et le tire-bouchon se dirige vers $\vec{c}$) ou des 3 doigts de la main droite (voir schéma)

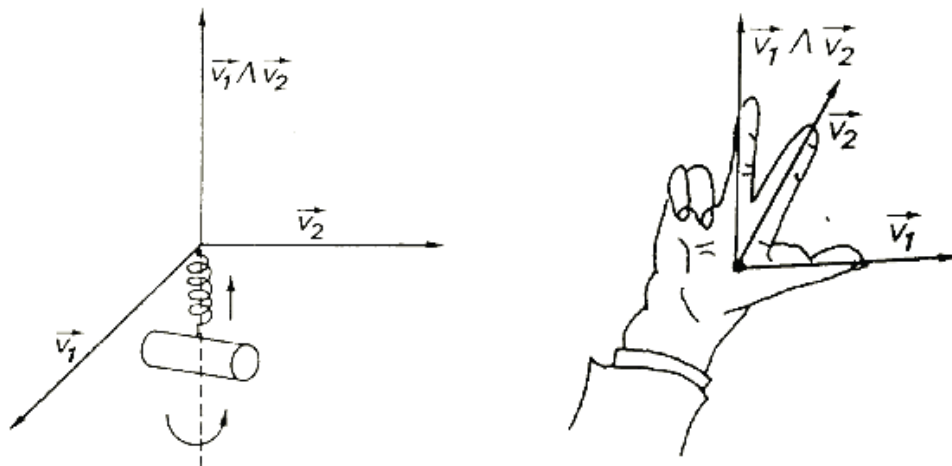


Figure 1.23 Règle du tire-bouchon ou des 3 doigts de la main droite.

La norme du vecteur résultant est :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{c}\| = c = ab \sin \alpha \text{ avec } \alpha \text{ angle entre } (\vec{a}, \vec{b})$$

Ceci correspond à l'aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

► *Remarques :* Pour 2 vecteurs perpendiculaires on a $c = ab$

Pour 2 vecteurs colinéaires on a $\vec{a} \wedge \lambda \vec{a} = \vec{0}$:

$$\lambda \vec{a} \wedge \mu \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \mu \vec{a} \wedge \lambda \vec{b}$$

► *Attention :* $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ (même norme mais sens opposé)

- *Remarque* : $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$; $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$; $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$
- Le produit vectoriel de 2 vecteurs de base pris dans l'ordre $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, \vec{u}_x, \vec{u}_y \text{ ou } \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ donne le troisième. Si l'ordre n'est pas respecté on obtient l'opposé du troisième vecteur.

Exemples : $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$ ou $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x$

d) Autre type de mouvement : le mouvement parabolique

Considérons le cas où le vecteur accélération est un vecteur constant et qu'à un instant choisi comme origine $t = 0$ le vecteur vitesse $\vec{v}_o$ est connu.

Pour simplifier l'étude, on peut définir le repère à partir des données du problème.

- L'origine du repère : position du point à $t = 0$
- L'axe z suivant le vecteur accélération, soit $\vec{a} = a_o \vec{u}_z$
- L'axe x perpendiculaire à l'axe z et dans le plan contenant $\vec{a}$ et $\vec{v}_o$. On aura alors à $t = 0$: $\vec{v}_o = v_{ox} \vec{u}_x + v_{oz} \vec{u}_z$
- L'axe y est défini de sorte que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée directe.

On obtient par intégrations successives :

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_o \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = v_{ox} \\ \dot{y} = v_{oy} \\ \dot{z} = a_o t + v_{oz} \end{cases} \quad \text{avec } v_{oy} = 0 \text{ on a}$$

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = v_{ox} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_o t + v_{oz} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x & x = v_{ox}t + x_{ox} = v_{ox}t \\ y & \text{avec } y = y_{oy} = 0 \\ z & z = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz}t + z_{oz} = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz}t \end{cases}$$

- Dans le cas où $v_{ox} = 0$, on retrouve le mouvement rectiligne uniformément varié suivant l'axe des z .
- Pour $v_{ox} \neq 0$, le mouvement est un mouvement plan, dans le plan défini par le vecteur accélération et le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$.

Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{ox} .

Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération constante a_o .

En éliminant la variable t entre les deux équations horaires du mouvement, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_{ox}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}a_o \frac{x^2}{v_{ox}^2} + v_{oz} \frac{x}{v_{ox}} \quad (1.85)$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{v}_o$ avec l'axe des x et v_o la norme de ce vecteur vitesse, on peut écrire :

$$v_{ox} = v_o \cos \alpha ; v_{oz} = v_o \sin \alpha ; \frac{v_{oz}}{v_{ox}} = \frac{v_o \sin \alpha}{v_o \cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{a_o}{v_o^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad (1.86)$$

La trajectoire est une portion de parabole.

Le schéma de la *figure 1.24* représente la trajectoire d'un projectile pour lequel le vecteur accélération vaut :

$$\vec{a} = \vec{g} = -g \vec{u}_z \Rightarrow a_o = -g, \text{ où } g \text{ est l'accélération de la pesanteur.}$$

La flèche h correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. La portée d correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsqu'il revient à l'ordonnée $z = 0$.

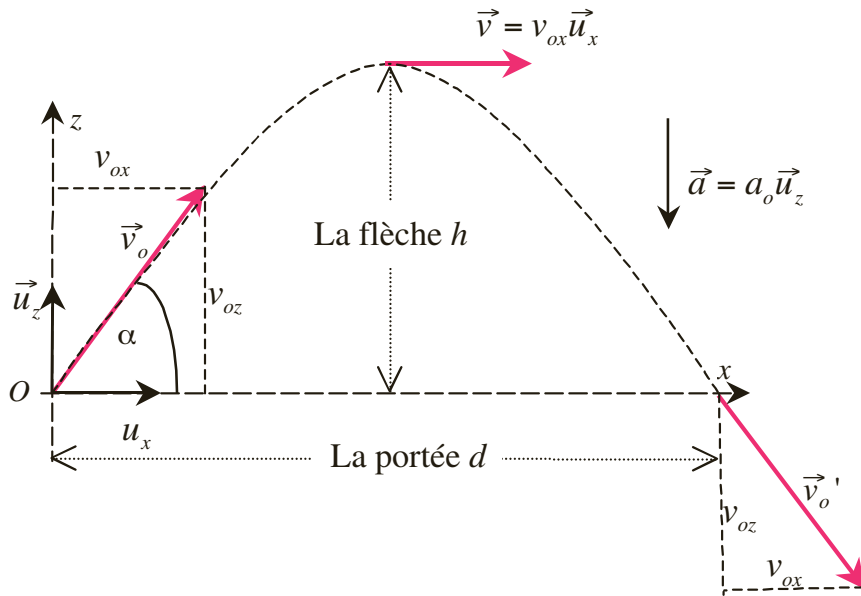


Figure 1.24 Chute parabolique. L'accélération $\vec{a}$ correspond ici à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

► Calcul de la portée :

$$z = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad x = d = -\frac{v_o^2}{a_o} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha$$

La portée est maximale pour $2\alpha = \pi/2$, soit pour un angle de tir correspondant à $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

► Calcul de la flèche :

Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = d/2$. On obtient alors :

$$h = \frac{1}{2} \frac{-g}{v_o^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_o^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right)^2 + \left(\frac{v_o^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right) \tan \alpha$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \alpha$$



POINTS CLEFS

- Dans un repère donné, les mêmes vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{a}$ peuvent s'exprimer différemment suivant le choix du système de coordonnées et de la base.

Tableau 1.1 RÉCAPITULATIF.

Vecteur	Coordonnées cartésiennes Base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ Coordonnées $M = (x, y, z)$	Coordonnées cylindriques et Base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ Coordonnées $M = (\rho, \theta, z)$
Position $\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x\vec{u}_x \\ y\vec{u}_y \\ z\vec{u}_z \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \rho\vec{u}_\rho \\ 0 \\ z\vec{u}_z \end{vmatrix}$
Vitesse $\vec{V}$	$\vec{V} = \begin{vmatrix} \dot{x}\vec{u}_x \\ \dot{y}\vec{u}_y \\ \dot{z}\vec{u}_z \end{vmatrix}$	$\vec{V} = \begin{vmatrix} \dot{\rho}\vec{u}_\rho \\ \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{z}\vec{u}_z \end{vmatrix}$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x}\vec{u}_x \\ \ddot{y}\vec{u}_y \\ \ddot{z}\vec{u}_z \end{vmatrix}$	$\vec{a} = \begin{vmatrix} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho \\ (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \\ \ddot{z}\vec{u}_z \end{vmatrix}$



Les expressions de ces vecteurs, rassemblées dans le *tableau 1.1*, sont à connaître ou à savoir retrouver très rapidement.

- Dans le cas d'un mouvement circulaire dans le plan (O, x, y) caractérisé par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ perpendiculaire à ce plan, il faut connaître ou savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération rassemblées dans le *tableau 1.2*.

Tableau 1.2 RÉCAPITULATIF.

Mouvement circulaire rayon R	Coordonnées polaires Base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$	Vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$
Position $\vec{OM}$	$\vec{OM} = R \vec{u}_\rho$	
Vitesse $\vec{v}$	$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta = v \vec{u}_\theta$	$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$
Accélération Normale $\vec{a}_n$	$\vec{a}_n = -R\omega^2 \vec{u}_\rho$	$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$
Accélération tangentielle $\vec{a}_t$	$\vec{a}_t = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$	$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$	$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}$

EXERCICES

1.1 Promenade en forêt (mouvement rectiligne uniforme)

Un randonneur se situant en un point A s'est égaré en forêt. Il marche alors pendant 2h à la vitesse $v_1 = 6$ km/h dans la direction Nord-Est jusqu'à un point B puis 1h30 dans la direction Sud à la vitesse $v_2 = 4$ km/h avant de retrouver la sortie de la forêt en C .

- Déterminer la distance totale (AC) parcourue par le randonneur entre le point de départ A et le point d'arrivée C .
- Combien de temps aurait-il mis en marchant directement de A vers C à la vitesse $v_1 = 6$ km/h ?
- Dans quelle direction aurait-il dû partir ? Donner l'angle en degrés que fait cette direction avec l'axe Ouest-Est.
- On considère le repère : origine le point de départ A et 2 axes orthogonaux correspondant aux directions Sud-Nord et Ouest-Est. Faire un schéma de ce repère et représentez les différentes positions A , B et C ainsi que les différents vecteurs vitesses intervenant dans l'exercice. Faire le schéma à l'échelle.

Réponses : a) 8,9 km b) 1,5 h c) 16,4° par rapport à l'axe Ouest-Est.

1.2 Freinage d'un tramway (mouvement rectiligne varié)

Une fois ses passagers installés, un tramway quitte l'arrêt en direction du centre-ville. Le tramway accélère tout d'abord avec une accélération $a_1 = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant 10 s jusqu'à atteindre sa vitesse de déplacement V_o . Il se déplace alors avec cette vitesse constante V_o pendant une minute lorsque le conducteur aperçoit devant lui un obstacle sur les voies situé à environ 50 m.

- a) Quelle est la distance parcourue par le tramway au moment où le conducteur aperçoit l'obstacle ?
- b) Sachant que le freinage d'urgence correspond à une décélération $a_2 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et que le temps de réaction du conducteur est de 2 s, le tramway pourra-t-il s'arrêter avant de heurter l'obstacle ?
- c) Tracer sur un graphique la vitesse en fonction du temps.

Réponses : a) 845 m b) non, il manque 4,2 m

1.3 Décollage d'un avion (mouvement rectiligne varié)

Soit un avion pouvant accélérer à $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et qui doit atteindre la vitesse de $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour décoller. On veut savoir si cet avion est capable de décoller depuis la piste du porte-avions *Charles de Gaulle* (la longueur de la piste est de 194,5m).

- a) Donner l'expression de la position de l'avion en fonction du temps ($x=f(t)$).
- b) En déduire une relation entre la position de l'avion, sa vitesse et son accélération.
- c) L'avion est-il capable de décoller ?

Réponse : c) oui (distance nécessaire 129 m)

1.4 Mesure de la hauteur d'une falaise (mouvement rectiligne varié)

Un étudiant cherche à mesurer la hauteur d'une falaise qui surplombe la mer. Pour cela l'étudiant lâche une pierre de masse $m = 0,100 \text{ kg}$ du haut de la falaise et à l'aide d'un chronomètre mesure la durée entre le moment où il a lâché la pierre et le moment où il entend le bruit de son entrée dans l'eau. Le chronomètre affiche 4,6 s. On prendra l'accélération de la pierre en chute libre égale à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et la vitesse du son $v_{\text{son}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) Déterminer la hauteur de la falaise.

b) De cette même falaise, l'étudiant veut jeter une pierre identique à la première pour atteindre un point P situé à une distance de 100 m du pied de la falaise. Calculez la vitesse initiale de la pierre en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (supposée horizontale) pour atteindre cet objectif P ?

c) Calculer la durée entre le lancer et le moment où on entend le choc de la pierre dans l'eau.

Réponses : **a)** 93,5 m **b)** 23,13 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ **c)** même durée que dans **a)** : 4,324 s

1.5 Spider Maine

Une araignée sarthoise est située au centre de l'horloge de la cathédrale du Mans.

À l'instant où la trotteuse (aiguille des secondes) passe sur le chiffre III du cadran de l'horloge ($t = 0$), l'araignée se dirige vers l'extrémité de cette aiguille en se déplaçant à vitesse constante $v = 3,3 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La trotteuse de l'horloge ayant une longueur de 2 m :

1) Quelle est la nature de la trajectoire de l'araignée par rapport à l'aiguille des secondes ?

2) Au bout de combien de temps l'araignée aura-t-elle atteint l'extrémité de l'aiguille ?

On cherche maintenant à déterminer la nature de la trajectoire de l'araignée pour un observateur situé aux pieds de l'horloge.

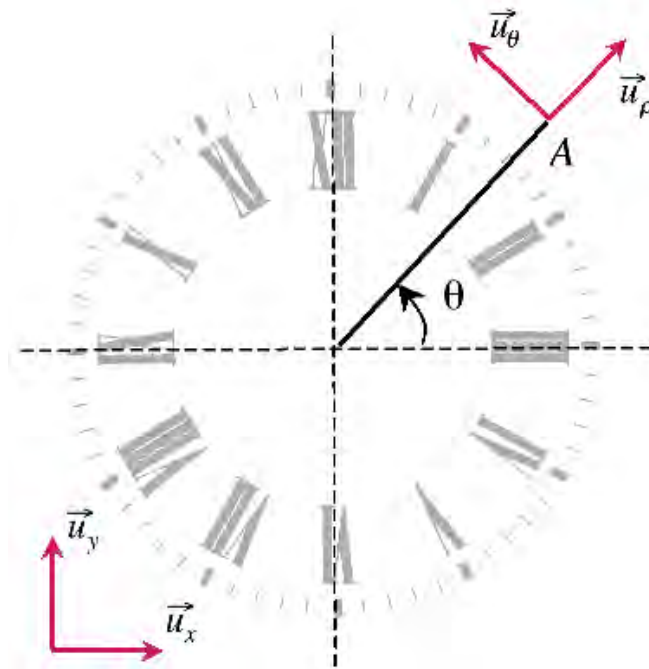
3) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ de l'araignée dans la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ liée à M en fonction des paramètres v_A et ω la vitesse angulaire de l'aiguille.

4) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}(M)$ de l'araignée dans la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ liée à M en fonction des paramètres v_A et ω (accélération angulaire de l'aiguille).

5) Calculer les composantes de $\vec{V}(M)$ pour $t = 0 \text{ s}$, 15 s, 30 s, 45 s et 60 s dans la base fixe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

6) Représenter à l'échelle sur un schéma les positions et les vecteurs vitesse de l'araignée pour les temps $t = 0 \text{ s}$, 15 s, 30 s, 45 s et 60 s. On prendra 1 cm qui correspondra à $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

7) Sachant que les vecteurs vitesses sont toujours tangents à la trajectoire, tracer la trajectoire de l'araignée pour un observateur situé à la base de l'horloge.



SOLUTIONS

1.1 Promenade en forêt

a) Pour calculer la distance parcourue par le randonneur il faut additionner les distances AB et BC que l'on peut assimiler à la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Dans le texte il est dit qu'entre les points A et B , le randonneur marche à une vitesse constante de $v_1 = 6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pendant 2 h, il parcourt donc $\|\overrightarrow{AB}\| = v_1 \cdot t = 2 \cdot 6 = 12 \text{ km}$.

De même entre B et C le randonneur parcourt $\|\overrightarrow{BC}\| = v_2 \cdot t = 1,5 \cdot 4 = 6 \text{ km}$.

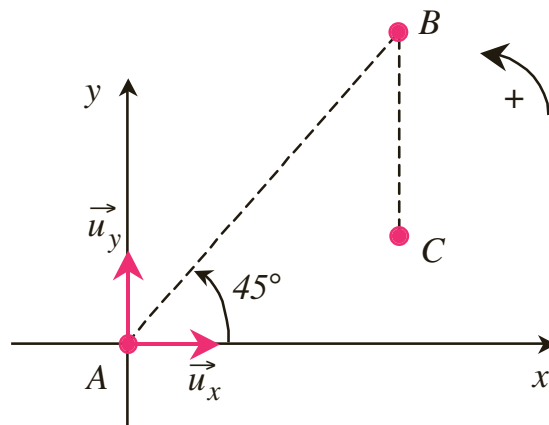
Ainsi le randonneur a parcouru $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = 6 + 12 = 18 \text{ km}$.

b) Connaissant la vitesse du randonneur entre les points A et C , il suffit de connaître la distance AC pour calculer le temps mis par le randonneur pour aller de A à C .

Calcul de la distance AC

Cela revient à calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On peut ici s'aider d'un schéma :



La relation de Chasles donne $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

⚠ Attention : $\|\overrightarrow{AC}\| \neq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$

On peut déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère (A, x, y) associé à la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

Pour cela on va utiliser le produit scalaire.

En effet, soit un vecteur $\vec{V}$ dont on veut déterminer les composantes V_x et V_y dans une base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On peut écrire :

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \text{ ou encore } \vec{V} : \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

On a :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_x = (V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_x = V_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x = V_x \cdot 1 + V_y \cdot 0$$

On a donc : $V_x = \vec{V} \cdot \vec{u}_x$ et de même $V_y = \vec{V} \cdot \vec{u}_y$

La définition du produit scalaire donne :

$$V_x = \vec{V} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_x\| \cos(\vec{V}, \vec{u}_x) \text{ et}$$

$$V_y = \vec{V} \cdot \vec{u}_y = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_y\| \cos(\vec{V}, \vec{u}_y)$$

Le schéma nous permet d'accéder aux angles entre les différents vecteurs.

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ aura pour composantes dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{AB}\| \|\vec{u}_x\| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_x) \\ \|\overrightarrow{AB}\| \|\vec{u}_y\| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \cos \frac{\pi}{4} \\ 12 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 12 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,48 \\ 8,48 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De même,

$$\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u}_x \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{BC}\| \|\vec{u}_x\| \cos(\overrightarrow{BC}, \vec{u}_x) \\ \|\overrightarrow{BC}\| \|\vec{u}_y\| \cos(\overrightarrow{BC}, \vec{u}_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cos \frac{\pi}{2} \\ 6 \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ se déduit de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 8,48 \\ 8,48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,48 \\ 2,48 \end{pmatrix}$$

Maintenant qu'on connaît les composantes de $\overrightarrow{AC}$ on peut calculer sa norme. En effet, on sait que $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{x_{AC}^2 + y_{AC}^2}$ donc :

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{8,48^2 + 2,48^2} = 8,84.$$

Donc la distance AC est de 8,84 km (environ 8,9 km).

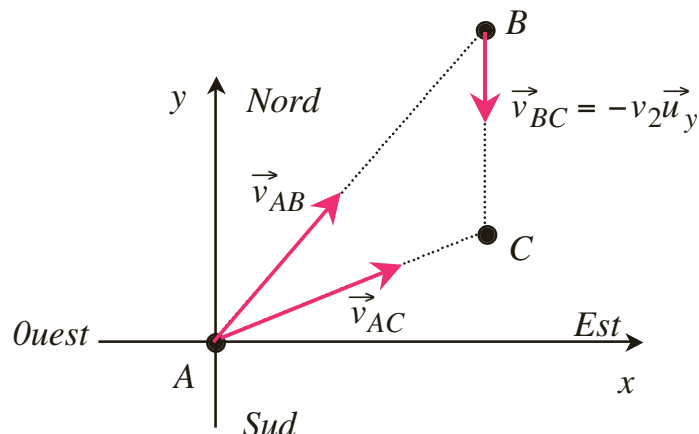
Si le randonneur marche à la vitesse de $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ alors il lui faudra $t = d/v = 8,84/6 = 1.41 \text{ h} = 1 \text{ heure } 25 \text{ minutes}$ pour aller directement de A à C.

c) Pour calculer l'angle entre deux vecteurs, dont on connaît les normes, on utilise de nouveau le produit scalaire.

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_x = \|\overrightarrow{AC}\| \|\vec{u}_x\| \cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}_x)$ et on a vu à la question précédente que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_x = 6\sqrt{2} = 8,485$ d'où :

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}_x) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_x}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\vec{u}_x\|} = \frac{8,485}{8,84} = 0,96 \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \vec{u}_x) = 16,4^\circ$$

d) Voir figure.



1.2 Freinage d'un tramway

a) Avant d'apercevoir l'obstacle le conducteur a accéléré 10 s à $1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (partie 1) puis s'est déplacé à vitesse constante pendant 60 s (partie 2).

Calcul de D_1 :

Connaissant l'accélération lors de la partie 1 on peut calculer la vitesse puis la distance parcourue par le tramway (D_1).

$\ddot{x} = a \Rightarrow v = \dot{x} = at + b$ où b est une constante d'intégration (1).

Détermination de la constante b :

À $t = 0$, $v = 0$ car le tramway était à l'arrêt donc $b = 0$.

$\dot{x} = at \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + b'$ où b' est une constante d'intégration (2)

Détermination de la constante b' :

À $t = 0$, $x = 0$ car le tramway ne s'est pas encore déplacé donc $b' = 0$.

On a finalement le déplacement en fonction du temps : $x = 0,5at^2$

Donc au bout de 10 s le déplacement D_1 effectué est de :

$$D_1 = x(t = 10) = 0,5 \cdot 1,3 \cdot 10^2 = 65 \text{ m}$$

Calcul de D_2 :

On sait que la vitesse est constante lors de cette partie du parcours. Il faut tout d'abord déterminer cette vitesse.

La vitesse V_o de déplacement est atteinte après 10 s : en utilisant la relation (1) on obtient :

$$V_o = at = 1,3 \cdot 10 = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le mouvement est maintenant uniforme à la vitesse V_o .

Donc au bout de 1 minute = 60 s le déplacement D_2 effectué est de :

$$D_2 = V_o t = 13 \cdot 60 = 780 \text{ m.}$$

Ainsi la distance totale parcourue avant que le conducteur n'aperçoive l'obstacle est :

$$D = D_1 + D_2 = 65 + 780 = 845 \text{ m}$$

b) Distance D_3 parcourue à la vitesse V_o pendant les 2 s correspondant au temps de réaction :

$$\dot{x} = V_o \Rightarrow x = V_o t \Rightarrow D_3 = 13 \cdot 2 = 26 \text{ m.}$$

Ensuite, une décélération de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ correspond à une accélération de $-3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La distance de freinage D_F peut se calculer en utilisant la relation qui relie la distance à l'accélération :

$\ddot{x} = a \Rightarrow \dot{x} = at + V_o$ où $V_o = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la vitesse de déplacement au moment où le conducteur commence à freiner (à $t = 0$).

$$v = \dot{x} = -3t + 13 \quad (3)$$

On en déduit la distance parcourue en fonction du temps :

$x = 0,5at^2 + V_o t + x_0$ avec x_0 une constante d'intégration.

À $t = 0$ le déplacement est nul donc $x_0 = 0$ d'où :

$$x = 0,5at^2 + V_o t = -\frac{3}{2}t^2 + 13t \quad (4)$$

La durée du freinage s'obtient en cherchant la date pour laquelle la vitesse s'annule. De la relation (3) on a :

$$t_F = \frac{-V_o}{a} = \frac{-13}{-3} = 4,3 \text{ s.}$$

La distance de freinage D_F peut donc être déterminée :

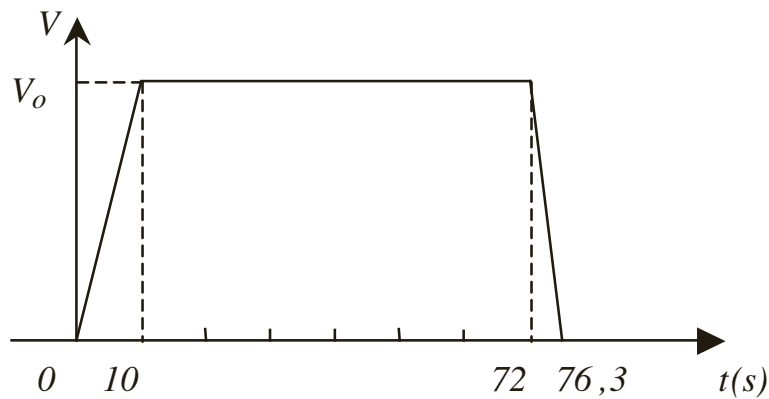
$$\begin{aligned} D_F &= -\frac{3}{2}t_F^2 + 13t_F = -\frac{3}{2}\frac{13^2}{3^2} + 13\frac{13}{3} \\ &= 13^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{13 \cdot 13}{6} = 28,17 \text{ m.} \end{aligned}$$

La distance totale D parcourue est :

$$D = D_F + D_4 = 28,17 + 26 = 54,17 \text{ m} > 50 \text{ m}$$

Le tramway ne pourra donc pas s'arrêter avant de heurter l'obstacle situé à 50 m sur les voies.

c) Voir figure.



1.3 Décollage d'un avion

a) Le mouvement est uniformément accéléré.

Les conditions initiales sont : à $t = 0$: $x = 0$ et $v = 0$. On a donc :

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad (1)$$

b) L'expression de la vitesse en fonction du temps est donnée par :

$$v = \dot{x} = at$$

On en déduit la durée du décollage :

$$t = \frac{v}{a} \quad (2)$$

En introduisant l'équation (2) dans la relation (1) on obtient :

$$x = at^2 = \frac{1}{2}a \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

c) On utilise la relation démontrée précédemment :

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{(200 \cdot 10^3 / 3600)^2}{2 \cdot 12} = 128,6 \text{ m} < 194,5 \text{ m}$$

L'avion peut donc décoller de la piste du *Charles de Gaulle* longue de 194,5 m.

1.4 Mesure de la hauteur d'une falaise

a) Pendant la chute, la pierre n'est soumise qu'à son poids. L'accélération de la pierre correspond à l'accélération de la pesanteur $a = g$.

On choisit un axe verticale orienté vers le bas. L'origine est le point de départ de la pierre qui est lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. On a alors : $z(0) = 0$ et $v(0) = 0$ et la hauteur de chute en fonction du temps est :

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_c^2$$

La durée t_c de la chute est donc de $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Attention, la durée mesurée par l'étudiant est égale à la durée t_c de la chute plus le temps t_s qu'a mis le son pour parvenir aux oreilles de l'étudiant. Le son se propage avec une vitesse constante V_s . On a donc :

$$t_s = \frac{h}{V_s}.$$

On a donc, si t_m est la durée mesurée :

$$t_m = t_c + t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V_s}$$

C'est-à-dire encore : $t_m - \frac{h}{V_s} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{2h}{g} = \left(t_m - \frac{h}{V_s}\right)^2$

On obtient le polynôme du deuxième degré suivant :

$$\frac{2h}{g} = t_m^2 - 2\frac{h}{V_s}t_m + \frac{h^2}{V_s^2} \Rightarrow \frac{h^2}{V_s^2} - 2h\left(\frac{t_m}{V_s} + \frac{1}{g}\right) + t_m^2 = 0$$

$$h^2 - 2h\left(V_s t_m + \frac{V_s^2}{g}\right) + V_s^2 t_m^2 = 0 \Rightarrow$$

$$h^2 - 2h(340 \cdot 4,6 + 34 \cdot 340) + (340 \cdot 4,6)^2 = 0$$

$$h^2 - 2h(13124) + 2446096 = 0$$

Ce polynôme possède deux solutions :

$$h = \left(V_s t_m + \frac{V_s^2}{g}\right) \pm \sqrt{\left(V_s t_m + \frac{V_s^2}{g}\right)^2 - V_s^2 t_m^2} = 13124 \pm \sqrt{13124^2 - 1564^2}$$

$$h = 13124 \pm 13030,475 \text{ soit } h_1 = 26\,154,475 \text{ m soit } h_2 = 93,5 \text{ m}$$

La solution h_1 est à rejeter (trop importante pour avoir un sens). La hauteur est donc de : $h_2 = 93,5 \text{ m}$

Remarque : pour avoir un ordre de grandeur de la hauteur on peut négliger le temps mis par le son pour remonter par rapport au temps mis par la pierre pour chuter. On a alors :

$$t_m \approx t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow h = \frac{gt_m^2}{2} = \frac{10 \cdot 4,6^2}{2} = 105,8 \text{ m}$$

On obtient bien une hauteur de cet ordre de grandeur mais en négligeant le temps mis par le son pour remonter on ferait une erreur relative de :

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{105,8 - 93,5}{93,5} = 13 \%$$

$$\text{On a } t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 93,5}{10}} = 4,324 \text{ s et}$$

$$t_s = \frac{h}{V_s} = \frac{93,5}{340} = 0,275 \text{ s}$$

b) La seule différence avec la situation précédente est que cette fois la pierre possède une vitesse initiale v_o parallèle à la surface de la mer. L'équation de la trajectoire peut alors être facilement déterminée suivant l'axe Oz et Ox :

Selon Oz :

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2 \text{ même situation que pour la chute libre}$$

Selon Ox : mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_o : $x = v_o t$

Pour déterminer v_o , il faut connaître la distance du point de chute au pied de la falaise ($D = 100 \text{ m}$) et t le temps que va mettre la pierre à toucher la surface de l'eau.

Puisque l'équation suivant Oz est la même que pour la question **a)** la

$$\text{durée de la chute sera identique c'est-à-dire : } t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On en déduit donc que :

$$v_o = \frac{D}{t_c} = D \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{100}{4,324} = 23,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ c'est à dire } 83,26 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

c) Le temps t_c est le même dans les deux cas soit $t_c = 4,324 \text{ s}$.

1.5 Spider Maine

1) L'araignée avance le long de l'aiguille à vitesse constante v_A : le mouvement de l'araignée par rapport à l'aiguille est donc rectiligne et uniforme.

2) La trotteuse mesure 2 m et l'araignée se déplace à v_A , on en déduit le temps de parcours de la trotteuse :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2}{0,033} = 60 \text{ s}.$$

L'aiguille effectuera pendant ce temps 1 tour complet du cadran.

3) En coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

La distance OA correspond à ρ : $OA = \rho = v_A t$ et $\dot{\rho} = v_A$

La vitesse angulaire correspond à :

$$\|\dot{\theta}\| = \omega = \frac{1 \text{ tour}}{60} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'aiguille tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique. La vitesse angulaire algébrique $\dot{\theta}$ est donc négative : $\dot{\theta} = -\omega = -\pi/30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'expression du vecteur vitesse est donc :

$$\vec{v}(A) = v_A \vec{u}_\rho + v_A t \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v_A \vec{u}_\rho - v_A t \omega \vec{u}_\theta = v_A (\vec{u}_\rho - \omega t \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{v}(A) = 3,3 \left(\vec{u}_\rho - \frac{\pi}{30} t \vec{u}_\theta \right) \text{ (en cm} \cdot \text{s}^{-1})$$

4) Le vecteur accélération en coordonnées polaires s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(A) = \frac{d}{dt} [v_A (\vec{u}_\rho + \dot{\theta} t \vec{u}_\theta)] = v_A \frac{d}{dt} (\vec{u}_\rho + \dot{\theta} t \vec{u}_\theta)$$

$$= v_A \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + v_A \dot{\theta} \frac{d(t\vec{u}_\theta)}{dt}$$

$$\vec{a}(A) = v_A \dot{\theta} \vec{u}_\theta + v_A \dot{\theta} [\vec{u}_\theta + t(-\dot{\theta} \vec{u}_\rho)] = -v_A \dot{\theta}^2 t \vec{u}_\rho + 2v_A \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(A) = -v_A \omega^2 t \vec{u}_\rho - 2v_A \omega \vec{u}_\theta = -v_A \omega (\omega t \vec{u}_\rho + 2 \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a}(A) = -0,11\pi \left(\frac{\pi}{30} t \vec{u}_\rho + 2 \vec{u}_\theta \right)$$

Remarque : on peut partir de l'expression du vecteur accélération en polaires : $\vec{a}(A) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$

Avec $\rho = v_A t$, $\dot{\rho} = v_A$, $\ddot{\rho} = 0$, $\dot{\theta} = -\omega$ et $\ddot{\theta} = 0$, on retrouve le résultat précédent.

5) Les vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ont pour expression dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir cours) :

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$$

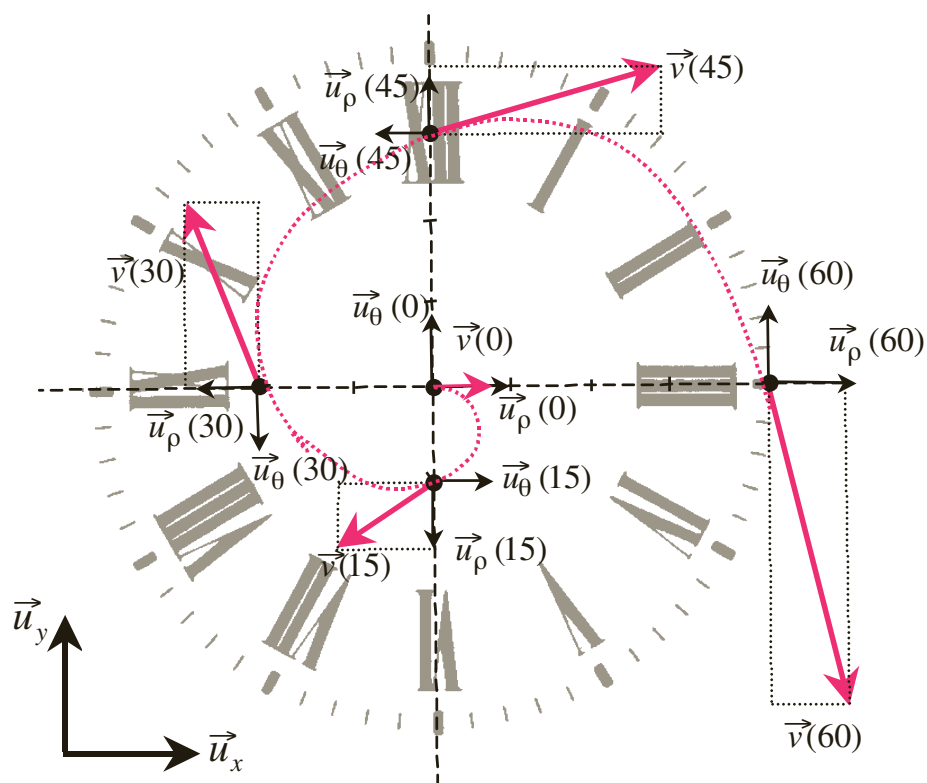
Sachant qu'à $t = 0$ l'aiguille est sur le chiffre 3 (c'est-à-dire $\theta(0) = 0$), l'angle θ s'exprime en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta} = -\omega$ par :

$$\theta = -\omega t.$$

Le tableau suivant rassemble les résultats obtenus pour les dates $t = 0, 15, 30, 45$ et 60 s.

t (seconde)	$\theta = -\frac{\pi}{30}t$	$\vec{u}_\rho$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{v}(A) = v_A\left(\vec{u}_\rho - \frac{\pi}{30}t\vec{u}_\theta\right)$
0	0	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{v}(0) = v_A\vec{u}_\rho(0) = v_A\vec{u}_x$
15	$-\frac{\pi}{2}$	$-\vec{u}_y$	$\vec{u}_x$	$\vec{v}(15) = v_A\left(\vec{u}_\rho - \frac{\pi}{2}\vec{u}_\theta\right)$ $= v_A\left(-\frac{\pi}{2}\vec{u}_x - \vec{u}_y\right)$
30	$-\pi$	$-\vec{u}_x$	$-\vec{u}_y$	$\vec{v}(A) = v_A(\vec{u}_\rho - \pi\vec{u}_\theta)$ $= -v_A(\vec{u}_x - \pi\vec{u}_y)$
45	$-\frac{3\pi}{2}$	$\vec{u}_y$	$-\vec{u}_x$	$\vec{v}(A) = v_A\left(\vec{u}_\rho - \frac{3\pi}{2}\vec{u}_\theta\right)$ $= v_A\left(\frac{3\pi}{2}\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$
60	-2π	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{v}(A) = v_A(\vec{u}_\rho - 2\pi\vec{u}_\theta)$ $= v_A(\vec{u}_x - 2\pi\vec{u}_y)$

Pour ces dates, les vecteurs unitaires $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ s'exprime simplement en fonction des vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$: le résultat peut se vérifier graphiquement.



CHAPITRE 2

Lois de Newton et Forces

PLAN	2.1	Principe d'inertie (1 ^{re} loi de Newton)
	2.2	Principe fondamental (2 ^e loi de Newton)
	2.3	Actions réciproques (3 ^e loi de Newton)
	2.4	Les forces
	2.5	Conclusion
OBJECTIFS	➤	Savoir faire le bilan des forces appliquées sur un système préalablement défini.
	➤	Connaître la méthode de résolution d'un problème de dynamique.

2.1 PRINCIPE D'INERTIE (1^{RE} LOI DE NEWTON)

a) Définitions

Système matériel

Un système matériel est un ensemble de points matériels. On distingue :

- *Le système matériel indéformable* : Tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- *Le système matériel déformable* : Tout système ne correspondant pas à un solide. Exemple : l'ensemble de deux mobiles autoporteurs indépendants forment un système déformable.

Le système matériel peut subir des actions ou pas de la part de l'extérieur. En particulier, on distingue :

- *Le système matériel isolé (ou fermé)* : Il n'existe aucune action venant de l'extérieur et s'exerçant sur le système.

- **Le système matériel pseudo-isolé** : Les actions extérieures agissant sur le système se compensent (tout se passe comme si il était isolé). Ainsi Sur Terre, un système ne peut pas être rigoureusement isolé puisqu'il subit obligatoirement son poids. Un mobile autoporteur sur un plan horizontal est pseudo isolé : la soufflerie du mobile compense le poids et le mobile se déplace dans le plan horizontal comme si il était isolé (les principales forces de frottement solide-solide sont éliminées).

Masse

La masse d'un système caractérise la quantité de matière qui le constitue. L'unité de masse dans le système international est le kilogramme (symbole : kg).

Très souvent noté m , la masse d'un système est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne. C'est une caractéristique du système.

Centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel ou centre de gravitation correspond au barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Il est noté I (comme Inertie) ou plus souvent G (comme Gravitation).

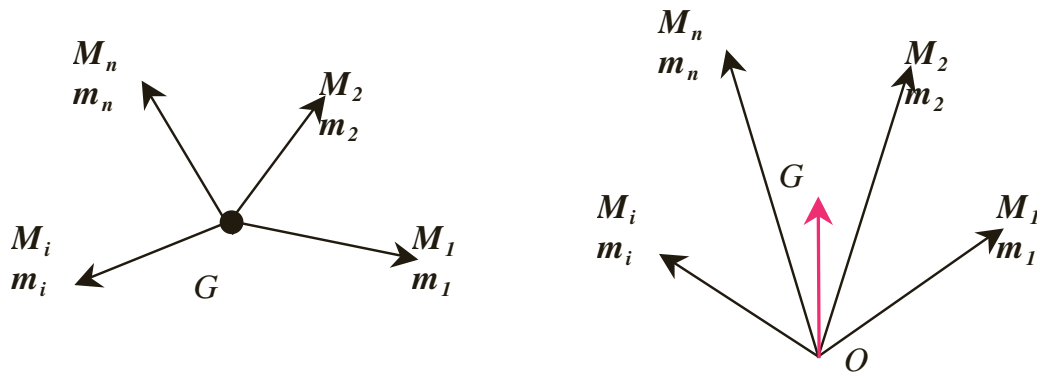


Figure 2.1 Centre d'inertie et barycentre.

Pour un système matériel comportant n points matériels noté $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ de masse respectivement $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ (voir figure 2.1), le barycentre est obtenu par la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Ce point G peut être repéré par rapport à une origine O (voir *figure 2.1*). En utilisant la relation de Chasles on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} m_i [\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}] = \vec{0} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0} \quad (2.3)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\right) \overrightarrow{GO} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (2.4)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} \quad (2.5)$$

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (2.5)$$

La quantité m correspond à la masse totale du système :

$$m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$



Exemple : Centre d'inertie d'un système constitué de 2 masses m_1 en M_1 et $m_2 = 2m_1$ en M_2 tel que $M_1 M_2 = d = 6 \text{ cm}$ (*figure 2.2*).

En utilisant la relation (2.1), on a :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2} = -2 \overrightarrow{GM_2}$$

Les deux vecteurs ont même direction et sont de sens opposé : les points G, M_1 et M_2 sont alignés et G est entre M_1 et M_2 .

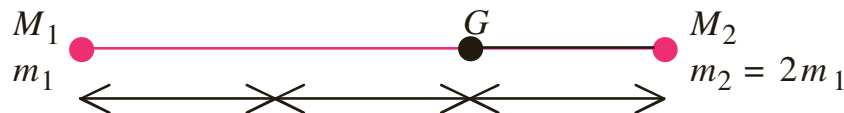


Figure 2.2 Centre d'inertie G pour un système constitué d'une masse m_1 et $m_2 = 2m_1$.

En passant par les normes, on obtient :

$$\|\overrightarrow{GM_1}\| = 2\|\overrightarrow{GM_2}\| \Rightarrow GM_1 = 2GM_2 \quad (2.6)$$

Cette équation fait apparaître deux inconnues GM_1 et GM_2 . Pour résoudre il nous faut une deuxième équation donnée par :

$$GM_1 + GM_2 = d \quad (2.7)$$

En reportant la relation (2.6) dans (2.7) on obtient :

$$2GM_2 + GM_2 = d = 3GM_2 \Rightarrow GM_2 = \frac{d}{3} = 2 \text{ cm}$$

$$GM_1 = 2GM_2 \Rightarrow GM_1 = \frac{2d}{3} = 4 \text{ cm}$$

Le centre d'inertie se situe entre les deux masses, du côté de la masse la plus grande, le rapport des distances étant égal au rapport inverse des masses.

Vecteur quantité de mouvement

En physique, il est toujours intéressant de rechercher des grandeurs qui se conservent dans certains cas au cours de l'évolution du système. Cela permet de prévoir comment le système va évoluer. L'énergie en est un exemple et le vecteur quantité de mouvement en est un autre.

Le vecteur quantité de mouvement (noté $\vec{p}$) d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donné est défini par :

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (2.8)$$

L'unité de la quantité de mouvement dans le système international est le $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel constitué de n masses m_i situées aux points M_i et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_i$ dans le référentiel donné est obtenu en ajoutant tous les vecteurs quantité de mouvement.



C'est une addition de vecteurs et non de normes. On a donc :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{p}_i \quad (2.9)$$

Cette relation peut encore s'écrire, en considérant que les masses sont des constantes dans le temps :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} \right) \quad (2.10)$$

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} (m \overrightarrow{OG}) = m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m \vec{V}_G$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée la masse totale du système.

b) Principe d'inertie : 1^{re} loi de Newton

Les principes ou lois ne se démontrent pas.

C'est à partir de l'observation d'un grand nombre d'expériences que le physicien est amené à énoncer une loi qui restera valide tant qu'une autre expérience ne la remettra pas en question. La mécanique classique se construit à partir des trois lois que Newton a énoncées.

Expérience

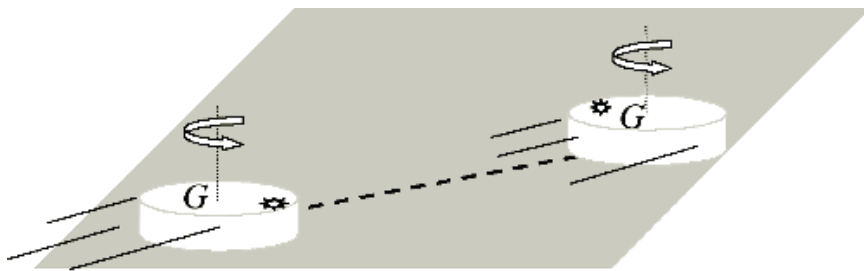


Figure 2.3 Mouvement du centre d'inertie d'un mobile autoporteur sur une table horizontale.

L'utilisation d'une table soufflante ou d'un mobile autoporteur permet d'étudier le mouvement d'un solide pseudo isolé. Le poids est compensé par la soufflerie et le corps peut se déplacer sans frottement avec le support. La table étant parfaitement horizontale et fixe par rapport à la Terre, un expérimentateur lance de façon quelconque le mobile autoporteur. On constate alors qu'il existe toujours un et un seul point présentant à chaque fois le même type de mouvement rectiligne uniforme (voir *figure 2.3*). Ce point appelé centre d'inertie coïncide avec le centre de gravitation G . Les autres points du solide ont un mouvement plus complexe combinant une rotation autour de G et une translation avec G . Si le mobile est simplement posé sur la table il reste immobile. Ce résultat est valable dans le référentiel terrestre dans lequel la table est fixe. Mais nous savons que la notion de mouvement ou de repos dépend du choix du référentiel. Ce résultat n'est donc pas valable dans tout référentiel. Le référentiel dans lequel le centre d'inertie d'un système pseudo isolé a un mouvement recti-

ligne uniforme ou est au repos est qualifié de *galiléen*. Ce résultat est vérifié pour tout système déformable ou non.

Principe d'inertie ou 1^{re} loi de Newton

Dans un référentiel (R) galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

Référentiel (R) galiléen
Système isolé (ou pseudo isolé)

$$\vec{V}_G = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{V}_G = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé.



Le principe d'inertie ne renseigne que sur le mouvement du centre d'inertie du système mais pas sur le mouvement des autres points constituant le système.

c) Référentiels galiléens

La définition de référentiel galiléen est liée au principe d'inertie et donc à l'expérience. On peut retenir la définition suivante :

Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie s'applique.

Dans l'expérience décrite dans la partie 2.1(b) avec les mobiles autoporteurs, on peut considérer que le référentiel terrestre est galiléen. La même expérience faite dans un véhicule en mouvement par rapport à la Terre montre que le référentiel lié au véhicule n'est plus galiléen sauf s'il se déplace d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Par rapport à un référentiel (R), un référentiel (R') est en translation rectiligne uniforme si les axes du repère qui le caractérise gardent toujours la même direction par rapport à (R) et que tous les points de (R') se déplacent avec la même vitesse $\vec{v}_e$ appelée vitesse d'entraînement. Dans ces conditions, le vecteur vitesse d'un point G , centre d'inertie d'un système, par rapport au référentiel (R) est égal à la somme du vecteur vitesse de ce même point G par rapport au référen-

tiel (R') et du vecteur vitesse caractérisant la translation rectiligne uniforme. C'est la loi de composition des vitesses. On a donc :

$$\vec{v}_R(G) = \vec{v}_{R'}(G) + \vec{v}_e$$



Figure 2.4 Le référentiel (R') est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel (R). Exemple : le tapis roulant. La vitesse, par rapport à la Terre, d'un point se déplaçant sur le tapis roulant est égale à la vitesse de ce point par rapport au tapis roulant plus la vitesse d'entraînement du tapis roulant.

Ainsi, si le référentiel (R) est galiléen et que le système étudié est isolé alors $\vec{v}_R(G)$ est un vecteur constant. Si le référentiel (R') est en translation rectiligne uniforme on a $\vec{v}_e$ constant et donc $\vec{v}_{R'}(G)$ également. Le référentiel (R') est lui aussi galiléen.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Il existe donc une infinité de référentiel galiléens tous en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

L'expérience montre que le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen (malgré le mouvement du soleil dans notre galaxie qui elle-même est en mouvement par rapport aux autres galaxies).

Le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne autour du Soleil (translation pratiquement circulaire uniforme). Il n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant, la révolution de la Terre s'effectue en 365 jours et 6 heures ce qui fait que le référentiel géocentrique peut en première approximation être considéré comme galiléen lorsque le phénomène étudié se produit pendant un temps très court devant la période de révolution de la Terre.

Pour les mêmes raisons le référentiel terrestre n'est pas rigoureusement galiléen mais s'en apparente lorsque le temps de l'expérience est très inférieur à 24 h où bien lorsque la précision des mesures ne permet pas de mettre en évidence ce mouvement.

2.2 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (2^E LOI DE NEWTON)

a) Notion de force

Un point matériel G est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions. Ces actions sont appelées forces. Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un « acteur » (celui qui exerce la force) et un « receveur » (celui qui subit la force).

« Un corps A exerce une force sur un corps B »



Une force s'exerce dans une certaine direction appelée « ligne d'action de la force », dans un certain sens et avec une certaine intensité. De plus, une force s'applique en un point particulier du système. Une **force** sera donc matérialisée par **un vecteur associé à un point d'application**. Son intensité est mesurée au moyen d'un dynamomètre et s'exprime en Newton (symbole N) dans le système international d'unités.

- *Représentation d'une action mécanique* : $(\vec{F}, A)$ avec $\vec{F}$ un vecteur ayant comme direction et sens la direction et le sens de l'action et comme norme l'intensité de l'action. Ce vecteur sera représenté au point d'application A .

b) Principe fondamental de la dynamique (ou 2^e loi de Newton)

Dès qu'un système subit des actions provenant de l'extérieur il n'est plus isolé. Les conséquences en sont une possible déformation ou bien une modification de mouvement qui se manifeste par une variation du vecteur quantité de mouvement qui ne se conserve plus. La deuxième loi de Newton précise comment se fait cette modification du mouvement.

Énoncé du principe

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système.

$$\sum \vec{f}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.11)$$

Le vecteur quantité de mouvement du système correspond au vecteur vitesse du centre d'inertie du système multiplié par la masse

totale (voir 2.1a). La masse étant un invariant il est possible de donner une autre forme à ce principe

Référentiel (R) galiléen
 Système non isolé $\sum \vec{f}_{ext} \neq \vec{0}$

$$\sum \vec{f}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V}_G)}{dt} = m \frac{d(\vec{V}_G)}{dt} = m\vec{a}_G$$



Ce principe nous renseigne uniquement sur le mouvement du centre d'inertie du système et pas sur le mouvement des autres points du système.

Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre, point qui aurait comme masse la masse totale du système et auquel on appliquerait la somme des forces agissant sur le système.

$$\sum \vec{f}_{ext} = m\vec{a}_G \quad (2.12)$$

Quelque soit le système considéré, on est ramené à l'étude du mouvement d'un point matériel qui correspond au centre d'inertie.

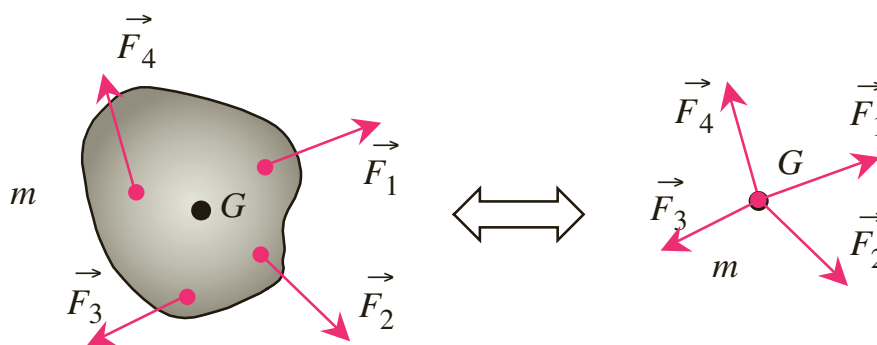


Figure 2.5 Illustration du théorème du centre d'inertie.

Il est possible de donner une autre forme à ce théorème en introduisant une nouvelle grandeur cinématique intéressante lorsqu'un point tourne autour d'un axe. Cette grandeur est le moment cinétique.

Moment cinétique et théorème du moment cinétique

Définition du moment cinétique

Considérons un point matériel M en rotation autour d'un point fixe dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$. Sa vitesse, dans ce référentiel, est notée $\vec{V}$.

On appelle moment cinétique du point M par rapport à un point fixe O , le moment par rapport à O de sa quantité de mouvement c'est-à-dire :

$$\vec{L}_o(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V} \quad (2.13)$$

Le moment cinétique $\vec{L}_o$, produit vectoriel (voir encart 1.5) du vecteur position avec le vecteur quantité de mouvement, est un vecteur perpendiculaire à OM et à la vitesse du point : c'est une grandeur perpendiculaire à la trajectoire du point M (voir *figure 2.6*).

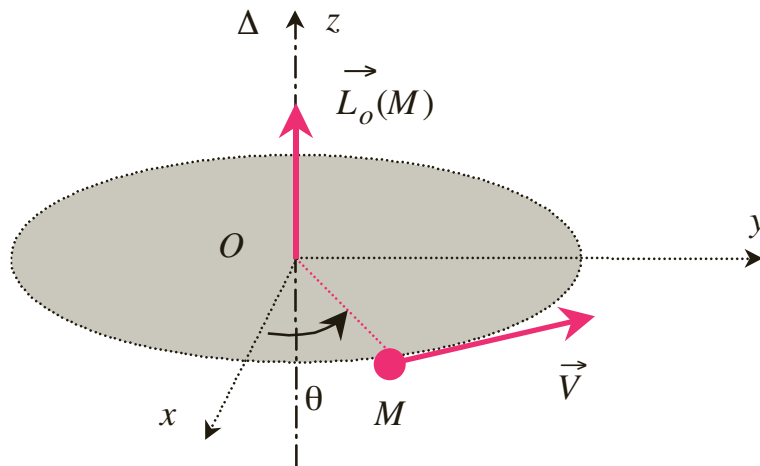


Figure 2.6 Moment cinétique par rapport au point O d'un point M en mouvement autour de O .



Le moment par rapport à un point O d'une grandeur vectorielle $\vec{X}$ liée à un point M est :

$$\vec{M}_o(\vec{X}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{X} \quad (2.14)$$



Exemple : Moment d'une force par rapport à O :

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad (2.15)$$

Le moment cinétique correspond au moment du vecteur quantité de mouvement.

Théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\vec{a} = \vec{OM} \wedge m\vec{a}\end{aligned}$$

avec $\vec{a}$ le vecteur accélération de M .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge m\vec{a} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum (\vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext})$$

La dérivée (par rapport au temps) du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O dans un référentiel (R) galiléen est égale à la somme des moments par rapport au même point O des forces extérieures appliquées au point M .

$$\sum (\vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad (2.16)$$



Pour un point matériel en rotation autour d'un axe fixe, on peut appliquer indifféremment le principe fondamental de la dynamique ou le théorème du moment cinétique.



Si la somme des moments des forces extérieures est nulle alors le moment cinétique est une grandeur vectorielle constante pouvant éventuellement être nulle. Dans le cas où le moment cinétique est non nul le mouvement est plan. En effet, les vecteurs vitesse et position sont perpendiculaires à tout instant au vecteur moment cinétique constant. Ils sont donc toujours dans le même plan qui correspond au plan du mouvement. Dans le cas où le moment cinétique est nul, le point a soit un mouvement rectiligne (vecteur position et vitesse ont même direction) soit il est en équilibre (vitesse nulle) dans le référentiel d'étude.

2.3 ACTIONS RÉCIPROQUES (3^E LOI DE NEWTON)

Considérons deux système S_1 et S_2 en interaction (à distance ou par contact). Cette troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques indique que chaque fois qu'un système S_1 exerce une action

(une force) $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ sur un système S_2 alors, simultanément, le système

S_2 exerce une action (une force) $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ sur le système S_1 . Ces forces sont égales et opposées.

Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système S_1 sur le système S_2 est exactement opposée à l'action simultanée du système S_2 sur le système S_1 .

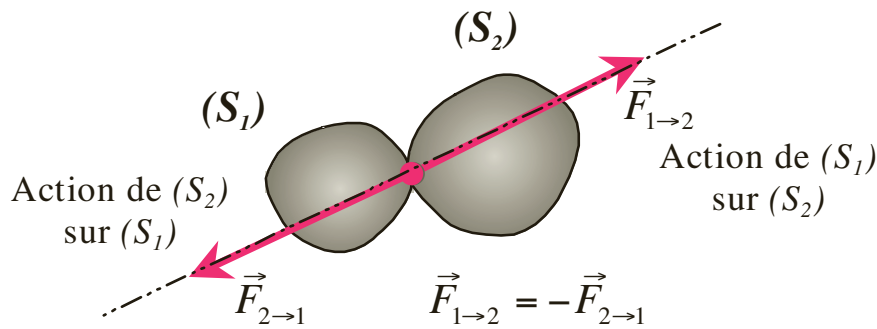


Figure 2.7 Illustration du principe des actions réciproques.



Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'univers comme à l'échelle des particules.

Ce principe peut être très utile puisqu'il nous permet de connaître l'action d'un corps A sur un corps B si l'on connaît l'action du corps B sur le corps A .

2.4 LES FORCES

Nous avons déjà vu qu'une force peut être représentée par un vecteur associé à un point correspondant au point d'application.

L'application des lois de la mécanique nécessite de faire un bon bilan de forces s'exerçant sur un système c'est-à-dire ne pas oublier une force ou ne pas en rajouter. Pour cela il faut que le système soit clairement défini pour pouvoir ensuite répertorier les forces que l'extérieur exerce sur lui.

Il existe deux types de forces :

- Forces d'interaction à distance (l'acteur et le receveur ne sont pas en contact) : exemples: les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion.
- Forces de contact : exemples: les forces de frottement et de tension.

a) Le poids d'un corps : force d'interaction à distance

Force d'interaction gravitationnelle

La force d'interaction gravitationnelle ou force de gravitation est un exemple de force d'interaction à distance. Elle s'exerce entre deux masses sans qu'il y ait contact. C'est cette force qui prédomine dans l'Univers du fait de l'importance des masses en présence.

Cette force suit une loi énoncée par Newton en 1650 et qui précise que deux masses m et M interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite.

La force $\vec{F}$ qu'exerce une masse M (ponctuelle en O) sur une masse m (ponctuelle en P) telle que $OP = r$, s'écrit :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_{OP} \quad (2.17)$$

avec $\vec{u}_{OP}$ vecteur unitaire dirigé suivant OP et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, la constante de gravitation universelle.

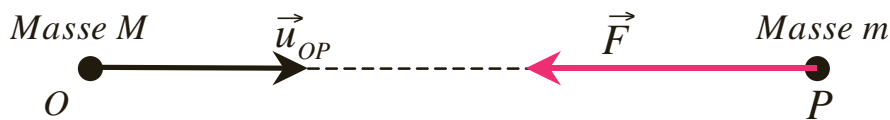


Figure 2.8 Force de gravitation : action de la masse M en O sur la masse m en P .

Les masses m et M sont toujours positives. La force de gravitation est donc toujours attractive.

D'après le principe des actions réciproques (3^e loi de Newton) la masse m exerce sur M une force :

$$\vec{F}' = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_{PO} = \mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_{OP} = -\vec{F}$$

La force de gravitation exercée par M en O sur une masse m située en un point quelconque P de l'espace peut encore s'écrire :

$$\vec{F} = m \vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_{OP} \quad (2.18)$$

La grandeur $\vec{G}(P)$ est appelé champ de gravitation créé par la masse M en tout point P de l'espace. C'est une grandeur homogène à une accélération (force sur une masse).

On montre que pour un solide de forme sphérique présentant une répartition de masse à symétrie sphérique que le champ de gravitation créé par cet astre en un point extérieur à celui-ci est le même que celui qui serait créé par une masse ponctuelle égale à la masse du solide et située au centre du solide. C'est le cas pour les astres de l'Univers et en particulier pour la Terre.

Champ de gravitation de la Terre

En un point P de l'espace situé à l'extérieur de la Terre le champ de gravitation a pour expression :

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \vec{u}_{OP} = -\mathcal{G} \frac{M}{(R_T + z)^2} \vec{u}_{OP} \quad (2.19)$$

- M masse de la Terre : $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg
- R_T : rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m
- La constante universelle de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ u.s.i.(unité du système international).
- r : distance du point P au centre O de la Terre
- z : altitude du point P par rapport à la surface de la Terre

L'expression et la valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre ($r = R_T$) correspondent à :

$$\begin{aligned} \vec{G}_o &= -\mathcal{G} \frac{M}{R_T^2} \vec{u}_{OP} \\ G_o &= \mathcal{G} \frac{M}{R_T^2} = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx g \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette valeur est proche de celle du champ de pesanteur g à la surface de la Terre. La différence provient principalement de la rotation de la Terre autour de son axe Sud-Nord. En première approximation il est possible de considérer que le champ de gravitation G_o correspond au champ de pesanteur g .



À l'altitude z on aura :

$$G(z) = \mathcal{G} \frac{M}{(R_T + z)^2} = \mathcal{G} \frac{M}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = G_o \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$$

Pour des altitudes faibles devant le rayon de la Terre ($z \ll R$) on peut écrire :

$$G(z) \approx G_o \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right) \approx g \quad (2.21)$$

Application numérique : Pour une altitude $z = 32$ km c'est-à-dire un rapport $2z/R_T = 1/100$, le champ de gravitation vaut celui à la surface de la Terre à 1% près.

Champ de pesanteur et poids d'un corps

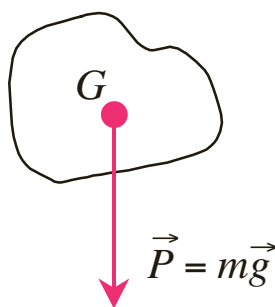
Le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m correspond principalement à la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur lui. On peut écrire :

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (2.22)$$

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est un vecteur dirigé suivant la verticale du lieu vers le centre de la Terre. Dans un volume restreint comme celui d'un laboratoire on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme (les verticales en différents points du lieu considéré sont parallèles et la valeur du champ est la même).

L'intensité du champ de pesanteur dépend du lieu sur Terre et de l'altitude. En France elle correspond à $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le poids d'un système correspond à la résultante de toutes les forces qu'exerce la Terre sur les différentes parties constituant le système. Le point d'application de cette résultante est le centre de gravité ou centre d'inertie G du système.



Poids d'un corps $\vec{P}$:

- Point d'application G
- Direction : la verticale
- Sens : vers le bas
- Intensité ou norme : mg
avec $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Figure 2.9 Poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m .

Dans toute expérience réalisée sur Terre, cette force interviendra à chaque fois qu'un bilan des forces sera effectué sur un système.

b) Les forces de contact

Le système étudié étant défini, à chaque fois qu'il y a un contact avec un corps extérieur au système il y aura interaction donc force exercée sur le système. Il suffit donc de faire le tour du système pour réaliser un bon bilan des forces. Les différentes forces de contact sont :

- Action $\vec{R}$ d'un support sur lequel repose le système et qui l'empêche de s'enfoncer. Cette action est souvent appelée réaction du support.
- Forces de frottement avec le fluide (gaz ou liquide) dans lequel se déplace le système et qui s'opposent à son déplacement
- Forces de frottement solide entre le système et le support
- Force exercée par un ressort ou un fil de liaison appelée tension du ressort ou du fil.
- Le point d'application de ces forces se trouve sur la surface de contact entre le système et l'extérieur. Mais d'après le théorème du centre d'inertie l'étude du mouvement du centre d'inertie du système est la même que celle d'un point sur lequel seraient exercées toutes les forces appliquées au système. Toutes les forces seront donc représentées au centre d'inertie G du système.

Action du support ou réaction normale

Considérons le cas d'un solide posé sur un support horizontal.

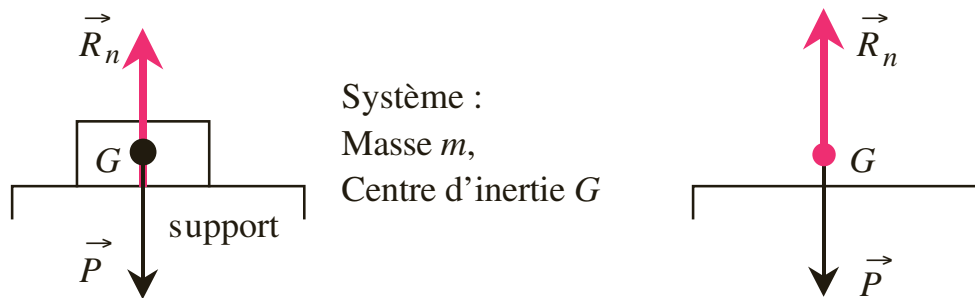


Figure 2.10 Réaction normale d'un support $\vec{R}_n$: elle compense le poids et empêche le système de s'enfoncer.

- La force résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact du système est notée $\vec{R}_n$.
- Le référentiel terrestre lié au support peut être considéré comme galiléen. Les forces exercées sur le solide sont le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}_n$. L'application du théorème du centre d'inertie immobile sur le support donne :

$$\vec{P} + \vec{R}_n = m\vec{a} = \vec{0} \quad (2.23)$$

- Le point G étant au repos, la réaction s'oppose au poids et est donc perpendiculaire au support. Elle permet de maintenir le solide en équilibre, sans qu'il s'enfonce (le support doit être suffisamment résistant).

Plus généralement, on appellera $\vec{R}_n$ la composante normale de la réaction d'un support sur le système.

Forces de frottement visqueux

Les forces de frottement visqueux correspondent à l'action d'un fluide qui entoure le système en mouvement par rapport au fluide.

La force de frottement s'oppose au mouvement. Si le système étudié est un solide en translation, cette force est opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie du solide et est proportionnelle à la valeur de la vitesse. Pour de faibles vitesses, on peut écrire :

$$\vec{f}_f = -\lambda \vec{v} \quad (2.24)$$

avec λ le coefficient de frottement, réel positif et $\vec{v}$ la vitesse du centre d'inertie par rapport au fluide. Le coefficient de frottement dépend de la nature du fluide (de sa viscosité η) et de la forme du solide en mouvement. Par exemple, pour une bille sphérique de rayon r , on a : $\lambda = 6\pi\eta r$



Pour des vitesses plus importantes, le frottement fluide devient proportionnel au carré de la vitesse et peut s'écrire $\vec{f} = -\alpha v \vec{v}$ avec α un coefficient réel positif.

Forces de frottement solide (forces de friction)

Le frottement solide correspond à l'action d'un solide (le support) en contact avec le système étudié.

Ces forces de frottement n'existent que si :

- Le système est en mouvement par rapport au support qui exerce les forces de frottement (frottement ou friction cinétique). Dans ce cas, la résultante des forces de frottement solide est une force qui s'oppose au déplacement du système.
- Le système est immobile par rapport au support qui exerce les forces de frottement mais est soumis à des forces extérieures qui tendent à vouloir le déplacer (frottement ou friction statique). Dans ce cas, la résultante des forces de frottement solide est une force qui s'oppose à la résultante de ces forces extérieures. Elle est donc

opposée au déplacement qu'aurait le système s'il n'y avait pas de frottement.

Dans le cas où il existe des forces de frottement solide, la réaction $\vec{R}$ du support peut se décomposer en :

- une réaction normale au support $\vec{R}_n$ qui empêche le solide de s'enfoncer et qui existe toujours tant qu'il y a contact.
- une force $\vec{f}_s = \vec{f}_{sc}$ (frottement cinétique) ou $\vec{f}_s = \vec{f}_{ss}$ (frottement statique) parallèle à la surface du support, résultantes des forces de frottement.

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_s \quad (2.25)$$

Système en mouvement : frottement cinétique $\vec{f}_{sc}$

Lorsque le système est en mouvement la résultante des forces de frottement prend une valeur maximale insuffisante pour maintenir l'équilibre. Dans ce cas, on a :

$$\frac{f_{sc}}{R_n} = \mu_c \quad (2.26)$$

où μ_c est une constante appelée coefficient de frottement ou coefficient de friction cinétique. cette constante dépend de la nature des surfaces en contact.

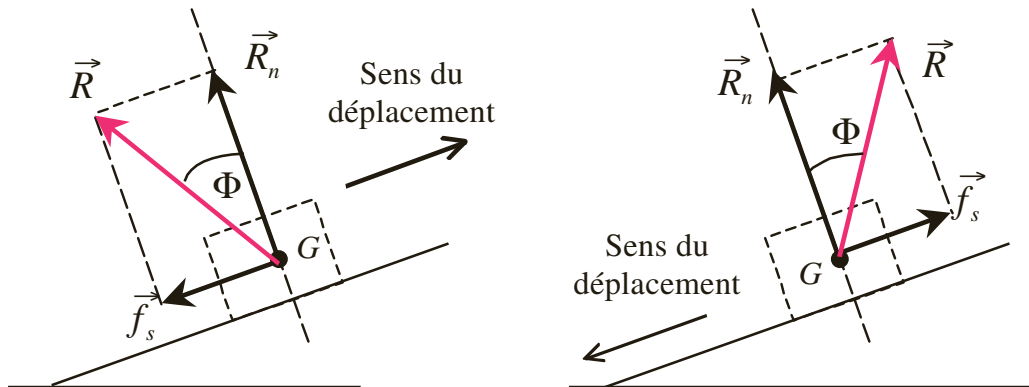


Figure 2.11 Représentation de la force de frottement solide f_s suivant le sens du déplacement de G . Les autres forces appliquées sur G ne sont pas représentées.

La réaction totale $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_{sc}$ fait avec la normale à la surface de contact un angle Φ (voir figure 2.11) tel que :

$$\tan \Phi = \frac{f_{sc}}{R_n} = \mu_c \quad (2.27)$$

Cette angle Φ est appelé angle de frottement.

Système en équilibre : frottement statique $\vec{f}_{ss}$

La résultante des forces de frottement s'adapte pour prendre juste la valeur nécessaire pour maintenir l'équilibre et donc empêcher le mouvement. Elle est comprise entre 0 et la valeur maximale limite correspondant au début du déplacement.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{f_{ss}}{R_n} < \mu_c \quad (2.28)$$

Dans ces conditions, l'angle φ que fait la réaction totale $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_{ss}$ avec la normale au support est inférieur à l'angle de frottement Φ .

$$\tan \varphi = \frac{f_{ss}}{R_n} < \mu_c = \tan \Phi \Rightarrow \varphi < \Phi \quad (2.29)$$

En cas de frottement solide, la réaction totale $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{f}_s$ d'un support est toujours incliné d'un angle φ par rapport à la normale au support afin de s'opposer au déplacement possible du centre d'inertie du système. L'inclinaison φ est maximale lorsque le système est en mouvement ($\varphi = \Phi = \arctan \mu_c$).

En cas d'absence de frottement ($\vec{f}_s = \vec{0}$), la réaction totale $\vec{R}$ correspond uniquement à la réaction normale $\vec{R}_n$ du support c'est-à-dire $\varphi = 0$.

Tension d'un fil et d'un ressort

Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil, l'autre extrémité étant fixe, celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance c'est-à-dire exerce une action sur l'opérateur (qui la ressent bien). Cette action du fil sur l'opérateur est appelée « tension du fil ». Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure.

La tension du fil, notée $\vec{T}$, est une force que le fil exerce sur ce qui le tend. Elle a pour direction la direction du fil, le sens opposé à l'action qui le tend et une intensité qui s'oppose à cette action. Si la tension devient trop grande pour le fil celui-ci casse.

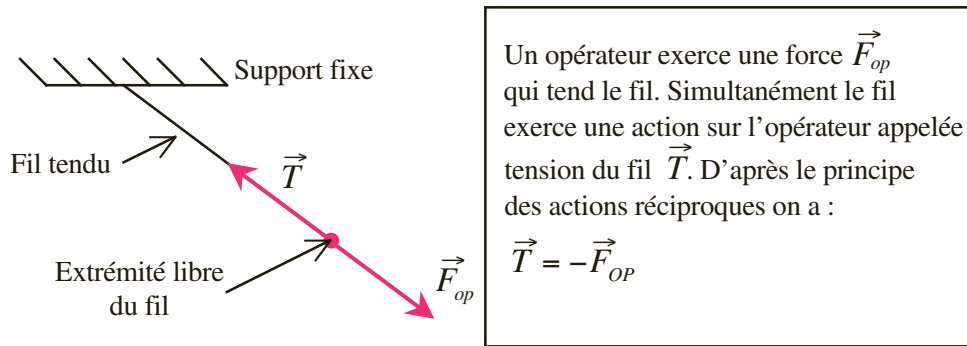


Figure 2.12 Tension d'un fil.

Si on remplace le fil par un ressort, celui-ci se déforme sous l'action de la force exercée pour le tendre. La déformation dépend de la force. Dans ces conditions la tension du ressort dépend de la déformation.

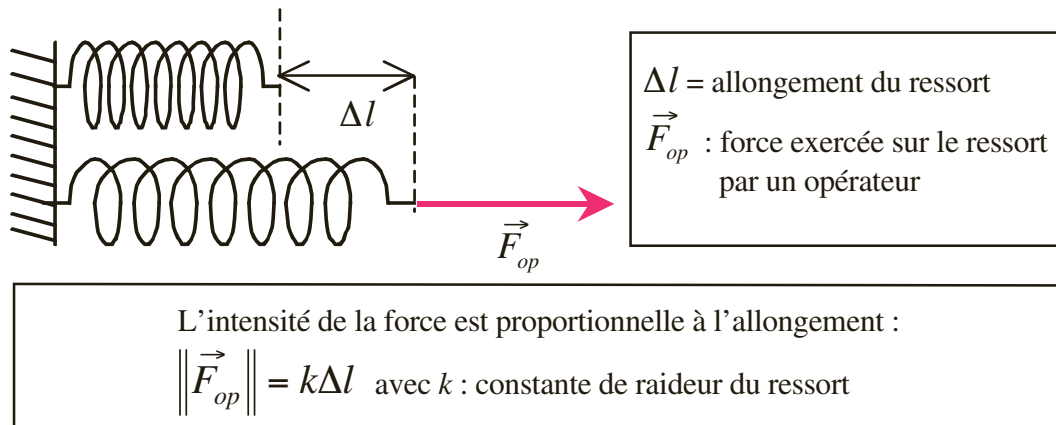


Figure 2.13 L'allongement d'un ressort est proportionnel à l'intensité de la force qui est exercée pour le déformer.

Considérons un ressort à spires non jointives pouvant travailler aussi bien en compression qu'en étirement et un opérateur exerçant une force sur l'extrémité libre du ressort, l'autre étant fixée sur un support (voir figure 2.13). On constate que l'intensité F_{op} de la force exercée pour déformer le ressort est proportionnelle à l'allongement Δl résultant de cette action. La constante de proportionnalité, noté k , est appelé « constante de raideur » ou plus simplement « raideur du ressort ». Plus un ressort est « raide » (plus k est grand) et plus il faudra exercer une force importante pour réaliser un même allongement. Son inverse $1/k$ correspond à l'élasticité du ressort.

La tension du ressort est l'action du ressort sur l'extérieur et est donc l'opposé de la force responsable de la déformation. Elle est donc elle aussi proportionnelle à l'allongement du ressort. De plus cette force est une force de rappel c'est-à-dire qui cherche à ramener le ressort dans son état au repos (état naturel sans déformation).

Les notations utilisées habituellement et à connaître sont les suivantes :

- ressort à vide ou au repos : ressort ni comprimé, ni étiré (pas de déformation) :
- l_o : Longueur du ressort au repos ou à vide
- l : longueur du ressort déformé
- k : constante de raideur du ressort
- Δl : allongement algébrique du ressort c'est-à-dire la différence entre sa longueur l actuelle (ressort déformé) et sa longueur à vide l_o . On a donc : $\Delta l = l - l_o$. Cette allongement est positif si le ressort est étiré et négatif s'il est comprimé (voir figure 2.14)
- $\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé suivant le ressort et orienté de l'extrémité fixe du ressort vers l'extrémité libre susceptible de se déplacer

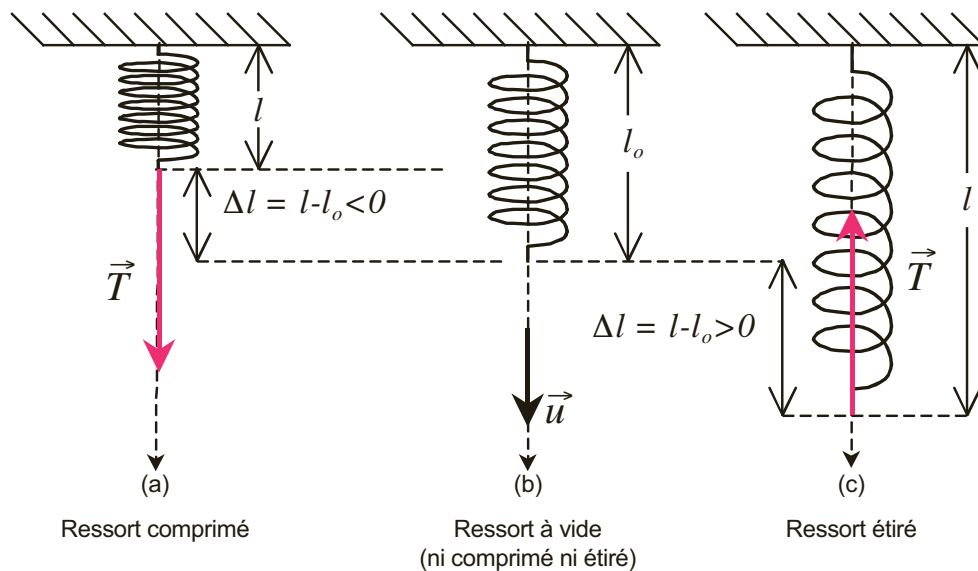


Figure 2.14 Représentation de la tension d'un ressort lorsqu'il est comprimé (a) ou étiré (c). La figure (b) correspond au ressort non déformé (l'état de référence). Dans tous les cas on peut écrire : $\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}$.

Dans ces conditions l'expression vectorielle générale de la tension d'un ressort s'écrit :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u} \quad (2.30)$$



Le signe négatif indique que la tension est une force de rappel. Si l'allongement est positif (étirement) alors la tension est opposée au vecteur unitaire. Pour un allongement négatif (compression), la tension aura le même sens que le vecteur unitaire. Pour repérer l'extrémité libre du ressort on introduit très souvent une abscisse x sur un axe parallèle au ressort. Suivant le choix de l'origine l'expression de l'allongement peut être différent (voir encart 2.1). Il est donc dangereux de retenir la définition de la tension avec la variable x .

Encart 2.1 La tension d'un ressort

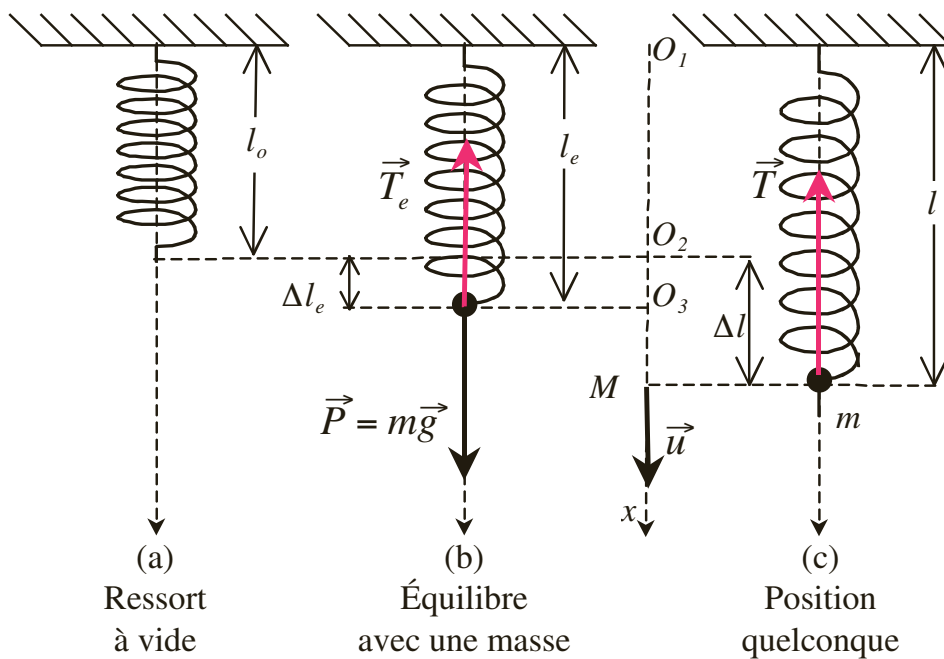


Figure 2.15 Expression de la tension $\vec{T}$ d'un ressort en fonction de l'abscisse x pour différents points origines.

Considérons le cas classique d'une masse accrochée à un ressort. On tire sur la masse et on la lâche. On cherche à exprimer la tension à un instant quelconque (schéma (c) figure 2.15).

► Dans tous les cas on a : $\vec{T} = -k\Delta l\vec{u} = -k(l - l_o)\vec{u}$

Sur un axe vertical dirigé vers la bas (vecteur unitaire $\vec{u}$, voir figure) on peut repérer le point matériel M par son abscisse $OM = x$. Suivant le choix de l'origine O la tension s'écrit :

► Origine O en O_1 (extrémité fixe du ressort (c)) $O_1M = x$

$$\vec{T} = -k(x - l_o)\vec{u}$$

► Origine O en O_2 (extrémité mobile du ressort à vide (a)) $O_2M = x$

$$\vec{T} = -kx\vec{u}$$

► Origine O en O_3 (position de la masse m à l'équilibre (b)) $O_3M = x$

$$\vec{T} = -k(\Delta l_e + x)\vec{u}$$



POINTS CLEFS

a) À retenir

- Première loi de Newton : principe d'inertie
Dans un référentiel R galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.
- Définition d'un référentiel galiléen
Tout référentiel pour lequel le principe d'inertie est applicable (ou plus généralement les lois de Newton).
- Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique
Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système c'est-à-dire du produit de la masse de ce système par le vecteur accélération du centre d'inertie du système.

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{f}_{ext} \quad (2.12)$$

- Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques
Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système S_1 sur le système S_2 est exactement opposée à l'action du système S_2 sur le système S_1 .
- Moment cinétique et théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V} \quad (2.13)$$

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un point fixe O d'un point matériel est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \sum (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}) \quad (2.16)$$

- Les forces
Forces à distance (poids d'un corps, force de gravitation etc.) et forces de contact (tension d'un fil ou d'un ressort, réaction d'un support avec ou sans frottement solide, frottement solide)
Les principales forces habituellement rencontrées sont :
 - Poids d'un corps appliqué au centre d'inertie du corps. Cette force est verticale dirigé vers le bas : $\vec{P} = m \vec{g}$ où $\vec{g}$ représente le champ de pesanteur à la surface de la Terre

- Tension d'un ressort : force de rappel : $\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}$

La grandeur Δl représente l'allongement algébrique du ressort (à ne pas confondre avec la longueur du ressort) c'est-à-dire la différence entre la longueur finale et la longueur à vide. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de l'extrémité fixe vers l'extrémité mobile du ressort.

- Frottement fluide : $\vec{f}_v = -\lambda \vec{v}$ (s'oppose à la vitesse)
- Réaction normale d'un support : $\vec{R}_n$ (force perpendiculaire au support et vers l'extérieur du support)
- Frottement solide : $f_s \leq \mu R_n$ où μ est le coefficient de frottement qui dépend de la nature des surfaces en contact. L'égalité a lieu lorsque le centre d'inertie du système se déplace.

b) Méthode de résolution d'un problème de mécanique

➤ Préciser le système

Il est important de bien définir le système pour pouvoir ensuite faire un bilan correct des forces que l'extérieur au système exerce sur celui-ci. En général, cela se réduit à un point matériel caractérisé par sa masse m . Dans le cas d'un solide en translation, on se ramène à l'étude d'un point qui correspond au centre d'inertie G du solide. Faire un schéma.

➤ Préciser le référentiel

Il faut être précis sur le choix du référentiel. Ceci est important d'autant plus que dans certains cas il peut y avoir plusieurs choix possibles. Il faut vérifier que le référentiel est bien galiléen pour pouvoir appliquer les lois de Newton. Le plus souvent l'étude se fait dans le référentiel terrestre en général galiléen pour une très grande partie des problèmes de mécanique. Le référentiel peut être défini aussi à partir d'un repère donné.

➤ Faire un bilan de toutes les forces extérieures appliquées au système (les représenter sur un schéma clair)

Cette étape est très importante car si elle est mal faite tout le reste sera faux. Pour faire ce bilan il faut énumérer les forces en commençant par les forces à distance (en général il y a le poids du système) puis les forces de contact. Pour ces dernières, il suffit de faire le tour du système (d'où l'importance de l'avoir bien défini) et de savoir qu'à chaque fois qu'il y a contact il y a une force. On rencontrera donc habituellement les forces de frottement, la tension d'un fil ou d'un ressort lié au système et la réaction du support. Il est important de faire un schéma clair sur lequel apparaîtront les différentes forces appliquées au centre d'inertie du système.

➤ Appliquer les lois de Newton et en particulier le principe fondamental de la dynamique ou le théorème du moment cinétique. Le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle.

- Choix d'un repère et d'une base d'étude pour la projection du principe fondamental de la dynamique. On obtient alors 3 équations différentielles définissant les composantes du vecteur accélération.
- Résolution du problème : on est ramené à un problème de cinématique : détermination de la vitesse et de la position du centre d'inertie du système. On peut alors répondre à toutes les questions posées.

c) Exemple : le pendule simple



Un pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre M d'un fil (l'autre O étant fixe par rapport à la Terre). La longueur du fil est l .

Déterminer la position d'équilibre du système

On écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans lui donner de vitesse (vitesse initiale nulle). Étudier le mouvement de la masse

Résolution :

Le système est le point matériel M de masse m .

Le référentiel est le référentiel terrestre galiléen dans lequel le point O est fixe.

Bilan des forces extérieures appliquées sur M :

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (force à distance) et une seule force de contact la tension $\vec{T}$ du fil (voir figure 2.16).



L'énoncé ne précise pas s'il existe des forces de frottement. Dans ce cas on les néglige.

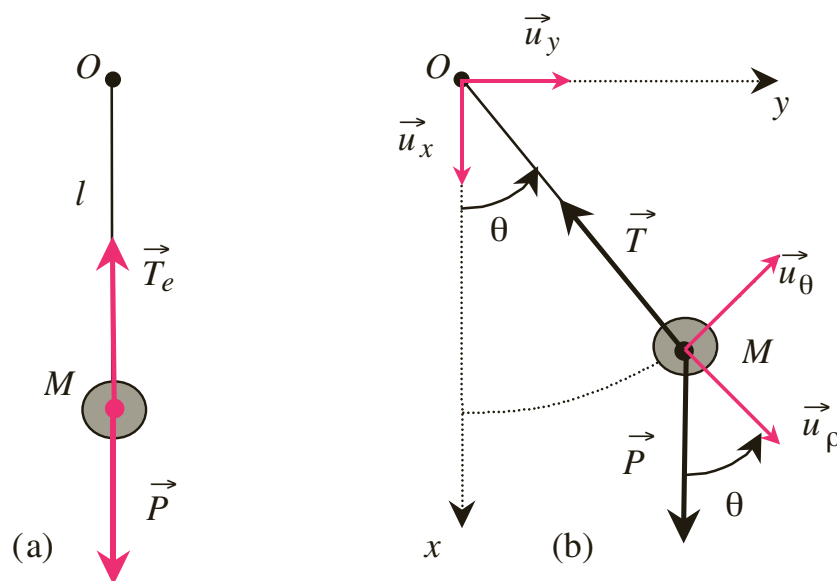


Figure 2.16 Le pendule simple en équilibre (a) et en mouvement (b).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \text{ où } \vec{a} \text{ est le vecteur accélération du point } M.$$

a) Position d'équilibre (voir figure 2.16 (a)) : $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P} = -m\vec{g}$$

La tension du fil à la même direction que le poids de M . Dans la position d'équilibre le fil prend donc la direction verticale

b) En mouvement (voir figure 2.16 (b)) :

L'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle. Il est nécessaire de choisir une base pour projeter cette relation. La trajectoire de la masse correspond obligatoirement à une portion de cercle de centre O et de rayon l . Le système de coordonnées polaires est donc bien approprié et la base utilisée sera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. En exprimant le vecteur accélération dans cette base (voir chapitre cinématique) on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

En projection sur les vecteurs de base, le poids et la tension s'écrivent :

$$\vec{T} = -T\vec{u}_\rho \text{ avec } T \text{ la norme du vecteur tension}$$

Composante du poids suivant $\vec{u}_\rho$:

$$\vec{P} \cdot \vec{u}_\rho = P\cos\theta = mg\cos\theta$$

Composante du poids suivant $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{P} \cdot \vec{u}_\theta = P\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\sin\theta$$

On peut aussi écrire les composantes sous forme de colonne :

$$\begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{T} \\ m\vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ -ml\dot{\theta}^2 \\ ml\ddot{\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \end{cases} \quad (2.31)$$

De la seconde équation, il est possible d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle non linéaire à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle θ est petit c'est-à-dire lorsque le sinus est assimilable à l'angle. Dans ce cas, l'équation différentielle devient:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{g}{l}$, la solution de cette équation s'écrit :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

L'équation différentielle précédente aurait pu être obtenue directement par le théorème des moments calculés en O soit :

$$\vec{M}_o(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = l\vec{u}_\rho \wedge (-T\vec{u}_\rho) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{u}_\rho \wedge (mg\cos\theta\vec{u}_\rho - mg\sin\theta\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = -mgl\sin\theta(\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta) = -mgl\sin\theta\vec{u}_z$$

$$\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{u}_\rho \wedge ml\dot{\theta}\vec{u}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) = -mgl\sin\theta\vec{u}_z$$

$$l^2\ddot{\theta} = -gl\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

De la première équation (2.31) on tire l'expression de la tension T en fonction de l'angle $\theta(t)$:

$$mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = m[g\cos\theta + l\dot{\theta}^2]$$

EXERCICES

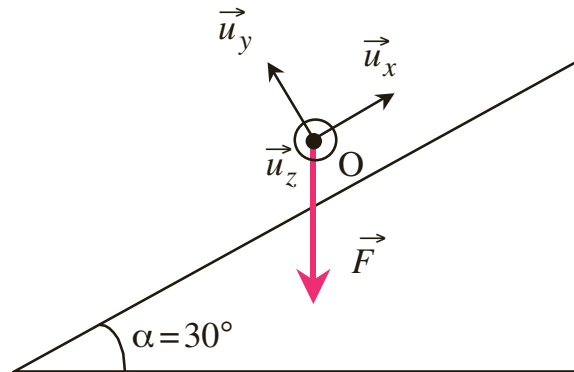
Stratégie pour résoudre les problèmes de dynamique

- 1) Définir le système mécanique à étudier.
- 2) Définir le référentiel d'étude.
- 3) Faire le bilan des forces.
- 4) Définir les inconnues
- 5) Établir les relations qui pourraient exister entre ces forces.

Exemple : $\|\vec{f}_s\| = \mu_c \|\vec{R}_n\|$

- 6) Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD).
- 7) Définir le repère d'étude approprié pour projeter le PFD sur les différents axes et établir ainsi des relations entre les forces.
- 8) Résoudre le problème.
- 9) Vérifier le sens physique de la réponse.

2.1 Utilisation des vecteurs en mécanique



Soit la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ associée au repère (O, x, y, z) .

On considère une force F représentée par le vecteur $\vec{F}$ de norme $\|\vec{F}\| = F = 3\text{N}$.

1) Donner en utilisant le produit scalaire, les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

2) On veut calculer le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$, par rapport au point O , de la force $\vec{F}$ appliquée en un point M , dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) sont $(-1; 2; 1)$ (unité m).

Sachant que $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$, calculer les coordonnées de $\vec{M}_O(\vec{F})$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

3) En déduire l'angle entre $\vec{OM}$ et $\vec{F}$

4) Comment peut-on vérifier que $\vec{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$?

Réponses : 2) $\{2,6 ; -1,5 ; 5,1\}$; 3) 55°

2.2 Hockey sur glace

Quelle est la manière la plus efficace pour envoyer le plus loin possible un palet de hockey sur glace :

a) En le jetant en l'air (en supposant qu'une fois arrivé au sol, il ne glisse pas sur la glace) ?

b) En le faisant glisser sur la glace ?

La vitesse initiale du palet (v_o) sera identique dans les deux cas.

Pour le cas **a)** :

On négligera les frottements du palet dans l'air. Pour répondre à cette question, on déterminera la distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on lance le palet avec une vitesse initiale v_o faisant un angle α avec l'horizontale. Il faudra donc déterminer l'angle α permettant d'atteindre la distance maximale.

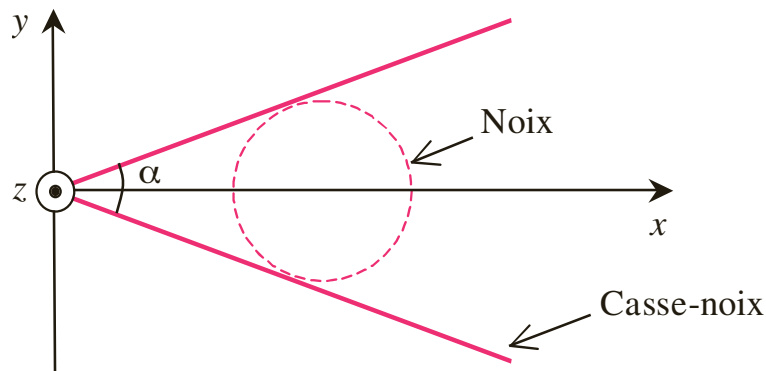
Pour le cas **b)** :

On prendra un coefficient de frottement entre la glace et le palet $\mu_C = 0,02$. Puis on déterminera la distance maximale atteinte par le palet lorsqu'il glisse sur la surface de la glace.

Réponses : **a)** $x_m = \frac{v_o^2}{2\mu_C g}$; **b)** $x_m = \frac{v_o^2}{g}$

2.3 Mode d'emploi d'un casse-noix

Vous avez certainement remarqué que pour utiliser un casse-noix (schématisé sur la figure ci-dessous), il faut tout d'abord placer la noix entre les bras du casse-noix. Ensuite il faut serrer (diminuer l'angle α) jusqu'à atteindre un angle α_c pour lequel la noix s'immobilise. En effet, avant d'atteindre cet angle critique la noix glisse entre les bras du casse-noix. Une fois la noix immobilisée vous pouvez serrer les bras du casse-noix et casser la noix.



Sachant que pour le casse-noix de l'expérience, le coefficient de frottement entre la noix (qui a un diamètre de $R = 3$ cm) et un bras du casse-noix est de $\mu_c = 0,3$ et que le poids de la noix est négligeable devant les autres forces, déterminez α_c .

Réponse : $\alpha_c = 33^\circ$

2.4 Tarzan

Tarzan qui a une masse $m = 80$ kg se saisit d'une liane attachée à un point O et de longueur $L = 4$ m. Au départ la liane fait un angle θ_o par

rapport à la verticale Ox . À l'instant $t = 0$, Tarzan saute dans le vide, sans vitesse initiale. Dans tout ce problème, on négligera les forces de frottements dues à l'air. On prendra $\theta_0 = -8^\circ$ (le sens positif est le sens trigonométrique).

a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, donner l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ et ses dérivées par rapport au temps.

b) Résoudre cette équation dans le cas où on considère que les valeurs de θ restent faibles.

c) En déduire la nature du mouvement et tracer l'allure de la courbe $\theta = f(t)$.

d) Calculer la période des oscillations, et en déduire la position de Tarzan (en degrés) 9 s après qu'il ait sauté ? (on prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Réponse : **d)** $T = 4 \text{ s}$.

2.5 Chute de grêle

Les grêlons sont des particules de glace dont les chutes en très grand nombre depuis certains nuages constituent la grêle. On a mesuré expérimentalement leur vitesse à l'arrivée au sol (v_s). Cette vitesse varie, en fonction de la masse du grêlon, entre $v_s = 15$ et $v_s = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On cherche à connaître le modèle mécanique permettant d'expliquer ces valeurs. Pour cela, on modélise le grêlon par une boule de glace (densité de la glace: $\rho_{\text{glace}} = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$) de rayon $R = 5 \text{ mm}$ qui chute d'un nuage situé à une altitude $h = 1500 \text{ m}$. On prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On prendra un axe Oz descendant tel qu'à $t = 0$: $z = 0$ et $v = 0$.

On teste alors trois modèles mécaniques différents :

1) On néglige les forces de frottement fluide dues à l'air.

a) Déterminer $v = f(t)$ et $z = f(t)$.

b) Calculer t_c la durée de la chute et en déduire v_s .

c) Conclure sur la validité du modèle.

2) On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme

$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha = 6\pi R \eta_{\text{air}}$ où R est le rayon du grêlon et

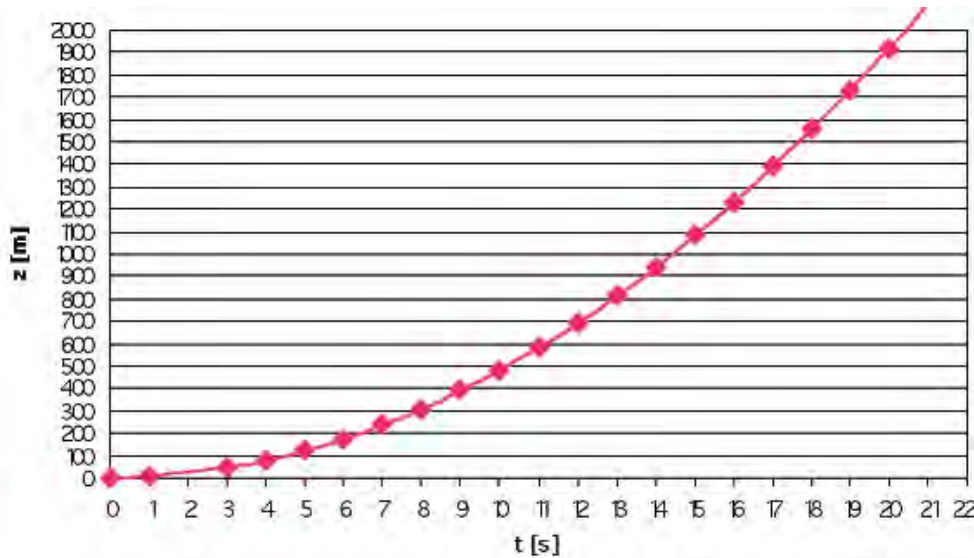
$\eta_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ est la viscosité de l'air.

a) Établir l'équation différentielle en $v(t)$.

b) Résoudre cette équation et donner $v = f(t)$.

c) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite v_l que l'on calculera.

- d) Déterminer l'équation $z = f(t)$.
 e) La fonction $z = f(t)$ est tracée sur le graphique de la figure ci-dessous. Déterminer une valeur approchée de t_c et en déduire v_s .
 f) Conclure sur la validité du modèle.



3) On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$ avec $\beta = 0,225\pi R^2 \rho_{\text{air}}$ où R est le rayon du grêlon et $\rho_{\text{air}} = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la densité de l'air.

- a) Établir l'équation différentielle en $v = f(t)$.
 b) En posant $w(z) = v^2(z)$ montrer que l'équation précédente $v = f(t)$ peut s'écrire : $\frac{1}{2} \frac{dw}{dz} + \frac{\beta}{m} w = g$.

On rappelle ici que pour une fonction $u = f(z(t))$: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt}$

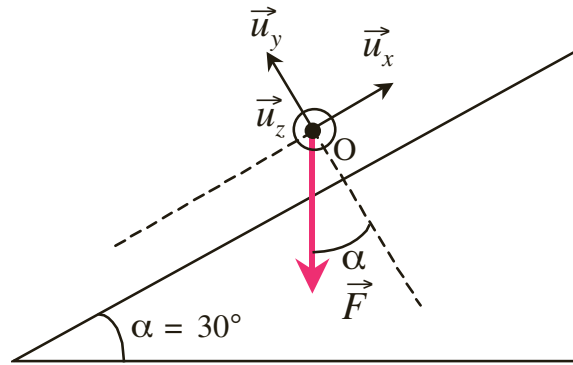
- c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'équation $v = f(z)$.
 d) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite v_l que l'on calculera.
 e) Calculer v_s .
 f) Conclusion.

Réponses : 1) $v_s = 171,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 2) $v_s = 167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 3) $v_s = 12,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

SOLUTIONS

2.1 Utilisation des vecteurs en mécanique

a) On utilise la relation vue dans l'exercice 1.1 sauf qu'ici la base comporte 3 vecteurs unitaires. On a donc dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:



$$\begin{aligned} \vec{F} &= \begin{pmatrix} \vec{F} \cdot \vec{u}_x \\ \vec{F} \cdot \vec{u}_y \\ \vec{F} \cdot \vec{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{u}_x\| \cos(\vec{F}, \vec{u}_x) \\ \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{u}_y\| \cos(\vec{F}, \vec{u}_y) \\ \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{u}_z\| \cos(\vec{F}, \vec{u}_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2 + \alpha) \\ 3 \cdot 1 \cdot \cos(\pi - \alpha) \\ 3 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \sin \alpha \\ -3 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \sin \alpha \\ -3 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{F} &= \begin{pmatrix} -3 \sin 30^\circ \\ -3 \cos 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(1/2) \\ -3(\sqrt{3}/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2,6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) La première chose à faire ici est de déterminer les composantes du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, x, y, z) . Connaissant les coordonnées des points $O(0; 0; 0)$ et $M(-1; 2; 1)$ on obtient pour les composantes de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_M - x_o \\ y_M - y_o \\ z_M - z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 2 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel :

Soit deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dont les composantes dans une base

$$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \text{ sont } \vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Le résultat du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est un vecteur noté $\vec{W}$. On a donc :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$$

Pour calculer le premier terme W_x on « élimine » la première ligne et on applique la règle du γ (gamma) :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ \\ \end{pmatrix} \Rightarrow W_x = U_y V_z - U_z V_y$$

De même pour le terme W_z on élimine la 3^e ligne :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ W_z \end{pmatrix} \Rightarrow W_z = U_x V_y - U_y V_x$$

Pour le terme W_y on élimine la 2^e ligne mais avant de faire la règle du gamma on reporte les valeurs de la première ligne en dessous de la 3^e ligne :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \Rightarrow W_y = U_z V_x - U_x V_z$$

Finalement :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x = U_y V_z - U_z V_y \\ W_y = U_z V_x - U_x V_z \\ W_z = U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix}$$

Ainsi on procède de même pour calculer $\overrightarrow{M_o(\vec{F})}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_o(\vec{F})} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1,5 \\ +2,6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2,0 - 1 \cdot 2,6 \\ 1 \cdot (-1,5) - 1,0 \\ (-1) \cdot (2,6) - 2 \cdot (-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2,6 \\ -1,5 \\ +5,1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Connaissant les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ on peut en calculer sa norme :

$$\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \sqrt{2,6^2 + (-1,5)^2 + 5,1^2} = 5,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Par définition $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})$ avec

$\|\vec{F}\| = F = 3 \text{ N}$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ m}$ on obtient :

$$\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \frac{5,9}{\|\overrightarrow{OM}\| \|\vec{F}\|} \approx \frac{5,9}{2,4 \cdot 3} = 0,8053 \text{ c'est-à-dire}$$

$$(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = 53,64^\circ$$

d) Il suffit de montrer que le produit scalaire $(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{F} = 0$:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{F} &= \begin{pmatrix} +2,6 \\ -1,5 \\ +5,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ -2,6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2,6 \cdot (-1,5) + (-1,5)(-2,6) + 5,1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

2.2 Hockey sur glace

a) Distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on lance le palet dans l'air avec une vitesse initiale v_o faisant un angle α avec l'horizontale.

Système = palet

Référentiel = référentiel terrestre galiléen

Forces appliquées au système : uniquement le poids $\vec{P}$ (on néglige les forces de frottement de l'air)

Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

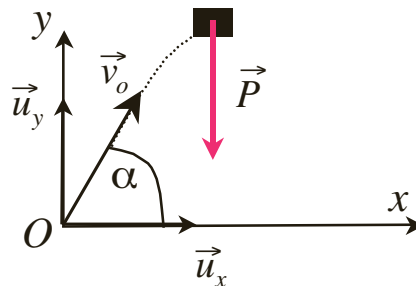
Projection sur Ox (axe horizontal) et Oy (axe vertical vers le haut) :

Conditions initiales : $x(0) = y(0) = 0$ et $\vec{v}_o = (\cos\alpha)\vec{u}_x + (\sin\alpha)\vec{u}_y$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} = v_o \cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = -gt + v_o \sin\alpha \end{pmatrix}$$

On en déduit les équations horaires :

$$\Rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} x = (v_o \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_o \sin\alpha)t \end{pmatrix}$$



Pour calculer la distance parcourue par le palet lorsqu'il touche le sol on impose $y = 0$ et on calcule le temps t de vol du palet.

$$y = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_o \sin\alpha}{g}$$

On réintroduit ce terme dans l'équation donnant la distance $x(t)$ parcourue par le palet :

$$x = v_o \cos\alpha t = \frac{2v_o^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Cette expression montre que la distance parcourue par le palet est fonction de l'angle α . La distance parcourue par le palet sera maximale pour $\sin 2\alpha$ maximal c'est-à-dire égal à 1. On a donc :

$$x = x_{ma} \text{ maximale} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\alpha_m = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha_m = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_m = 45^\circ$$

On peut alors calculer la distance maximale du lancée pour $\alpha_m = 45^\circ$:

$$x_{ma} = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha_m)}{g} = \frac{v_o^2}{g}$$

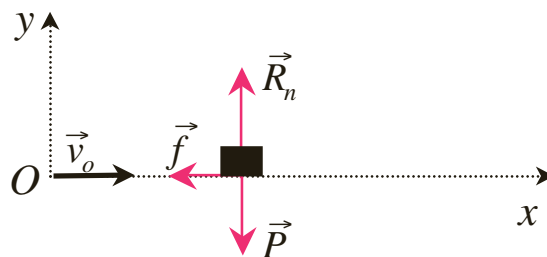
(cette distance est atteinte uniquement si on jette le palet avec un angle de 45° par rapport à la surface du sol).

b) Distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on fait glisser le palet sur la glace en lui donnant une vitesse initiale v_o .

Système = palet

Référentiel = référentiel terrestre galiléen

Forces appliquées au système : le poids $\vec{P}$, la réaction du sol $\vec{R}_n$ et la force de frottement solide $\vec{f}$.



Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = m\vec{a}$

Projection sur Ox et Oy :

$$\begin{cases} -f = ma_x = m\ddot{x} \\ R_n - mg = ma_y = m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Équations auxquelles il convient d'ajouter la relation entre f et R_n :
 $f = \mu_c R_n$

Sachant qu'il n'y a pas de mouvement suivant y on a $a_y = 0$, c'est-à-dire :

$$R_n = mg \Rightarrow f = \mu_c R_n = \mu_c mg$$

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe Ox devient :

$$-f = -\mu_c mg = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\mu_c g$$

On en déduit alors la vitesse du palet suivant l'axe Ox :

$$\text{Avec à } t = 0, v_x = v_o \text{ on a } v_x = \dot{x} = -\mu_c g t + v_o$$

Et le déplacement suivant Ox (avec à $t = 0, x = 0$) :

$$x = -\frac{1}{2}\mu_c g t^2 + v_o t.$$

Pour déterminer la distance maximale atteinte par le palet il faut calculer la date $t = t_m$ pour laquelle $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_x = 0$ (le palet s'arrête).

$$v_x = 0 = -\mu_c g t_m + v_o \Rightarrow t_m = \frac{v_o}{\mu_c g}$$

En réintroduisant t_m dans l'équation du déplacement selon l'axe Ox on obtient la distance maximale x_{mb} parcourue par le palet :

$$x_{mb} = -\frac{1}{2}\mu_c g t_m^2 + v_o t_m \Rightarrow x_{mb} = -\frac{1}{2}\mu_c g \frac{v_o^2}{(\mu_c g)^2} + v_o \frac{v_o}{\mu_c g} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{\mu_c g}$$

Conclusion :

$$\frac{x_{mb}}{x_{ma}} = \frac{\frac{v_o^2}{2\mu_c g}}{\frac{v_o^2}{g}} = \frac{1}{2\mu_c} = \frac{1}{2 \cdot 0,02} = 25$$

On peut en conclure que faire glisser le palet sur la glace permet d'atteindre une distance 25 fois supérieure à celle atteinte si on le lançait dans l'air.

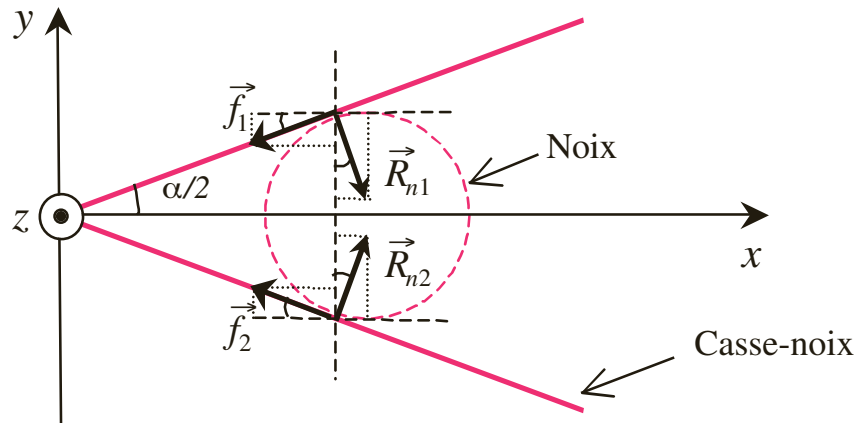
Remarque : ce résultat reste valable tant que le coefficient de frottement (qui ne dépend que des interactions surface du palet et surface de la glace) reste inférieur à 0,5.

2.3 Mode d'emploi d'un casse-noix

Système : noix

Référentiel : terrestre galiléen (O, x, y, z)

Forces appliquées au système : le poids $\vec{P}$ négligeable, les réactions normales aux bras du casse-noix $\vec{R}_{n1}$ et $\vec{R}_{n2}$ et les forces de frottements entre les bras du casse-noix et la noix $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$.



Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R}_{n1} + \vec{f}_1 + \vec{R}_{n2} + \vec{f}_2 = m \vec{a}$$

Pour des raisons de symétrie on peut écrire :

$$\|\vec{R}_{n1}\| = \|\vec{R}_{n2}\| = R_n ; \|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = f \text{ et } f = \mu_c R_n \text{ (la noix glisse)}$$

La projection sur Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} ma_x = m\ddot{x} = -f_1 \cos(\alpha/2) + R_{n1} \sin(\alpha/2) - f_2 \cos(\alpha/2) + R_{n2} \sin(\alpha/2) \\ ma_y = m\ddot{y} = -f_1 \sin(\alpha/2) + R_{n1} \cos(\alpha/2) - f_2 \sin(\alpha/2) + R_{n2} \cos(\alpha/2) \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} m\ddot{x} = -2f \cos(\alpha/2) + 2R_n \sin(\alpha/2) \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases} \text{ et avec } f = \mu_c R_n,$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2R_n [\sin(\alpha/2) - \mu_c \cos(\alpha/2)] \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que pour que la noix soit immobile il faut $a_x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = 0 &= 2R_n [\sin(\alpha_c/2) - \mu_c \cos(\alpha_c/2)] \\ &\Rightarrow (\sin(\alpha_c/2) - \mu_c \cos(\alpha_c/2) = 0) \end{aligned}$$

Donc : $\mu_c = \frac{\sin(\alpha_c/2)}{\cos(\alpha_c/2)} = \tan(\alpha_c/2) \Leftrightarrow \alpha_c = 2\arctan\mu_c$

$$\alpha_c = 2\arctan\mu_c$$

A.N. : pour $\mu_c = 0,3$ on obtient $\alpha_c = 33,4^\circ$

Remarque : l'angle α_c ne dépend pas de la taille de la noix.

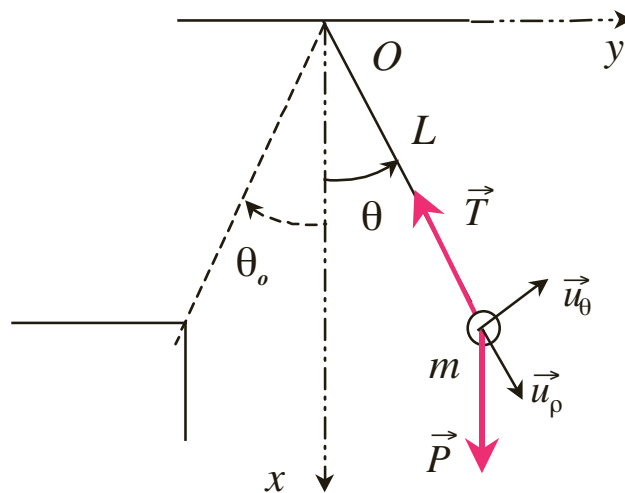
2.4 Tarzan

a) *Système* : Tarzan assimilé à un point de masse m .

Référentiel : terrestre galiléen

Forces appliquées au système : le poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ de la liane.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$



Choix du repère : système d'axe (O, x, y) (voir schéma). Le mouvement de Tarzan étant circulaire ($L = OM = \text{constante}$) le système de coordonnées polaires ($\rho = L, \theta$) avec la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est plus approprié.

Projection sur $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$:

$$\begin{cases} ma_\rho = \vec{P} \cdot \vec{u}_\rho + \vec{T} \cdot \vec{u}_\rho = mg\cos\theta - T \\ ma_\theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_\theta + \vec{T} \cdot \vec{u}_\theta = -mg\sin\theta - 0 \end{cases}$$

On sait qu'en coordonnées polaires, l'accélération d'un objet a pour expression : $\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Ici $\rho = L \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ et l'expression de l'accélération devient :

$$\vec{a} = a_{\rho} \vec{u}_{\rho} + a_{\theta} \vec{u}_{\theta} = -L\dot{\theta}^2 \vec{u}_{\rho} + L\ddot{\theta} \vec{u}_{\theta}$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\cos\theta - (T/m) = -L\dot{\theta}^2 \\ -g\sin\theta = L\ddot{\theta} \end{cases}$$

La première relation n'est pas utile car on ne connaît pas la valeur de $\|\vec{T}\| = T$. En revanche la deuxième relation nous permet de répondre à la question c'est-à-dire donner une équation différentielle en θ :

$$-g\sin\theta = L\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

b) L'équation différentielle précédente n'a pas de solution triviale, en revanche lorsque θ reste faible on peut simplifier cette équation. En effet, si θ est suffisamment « petit » alors on peut dire que $\sin\theta \approx \theta$ (développement limité au premier ordre). L'équation différentielle du mouvement devient alors :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ (pulsation propre)}$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. On sait que la solution de cette équation différentielle du second ordre sans second membre est de la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ où θ_m et φ sont des constantes qui se déterminent à partir des conditions initiales.

$$\text{On a : } \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta} = -\theta_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Pour } t = 0 \text{ on a } \theta(0) = \theta_o \text{ et } \vec{v}(0) = L\dot{\theta}(0)\vec{u}_{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$\theta_o = \theta_m \cos\varphi \quad (1)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = -\theta_m \omega \sin\varphi \quad (2)$$

De l'équation (2) on tire : $\sin\varphi = 0$ car on sait que $\omega \neq 0$ et que si $\theta_m = 0$ alors il n'y a pas de mouvement.

$$\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi$$

La relation (1) permet alors de déterminer la constante θ_m :

$$\theta_o = \theta_m \cos 0 = \theta_m \text{ ou } \theta_o = \theta_m \cos \pi = -\theta_m.$$

En choisissant la solution correspondant à une amplitude $\theta_m > 0$ on a :

$$\theta = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) = \theta(t) = -8^\circ \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

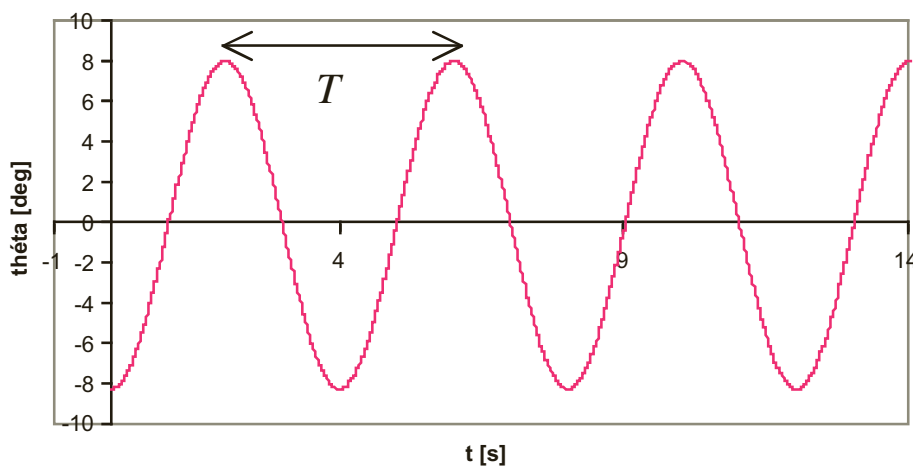
Remarque : les deux solutions possibles sont identiques :

$$\theta = \theta_o \cos \omega t = -\theta_o \cos(\omega t + \pi) \text{ soit :}$$

$$\theta = -8^\circ \cos \omega t = 8^\circ \cos(\omega t + \pi)$$

c) Le mouvement est donc un mouvement oscillatoire non amorti.

Le tracé est le suivant :



Remarque : l'amplitude maximale des oscillations est égale à $\theta_m = 8^\circ$ (l'écart angulaire initial).

d) La période des oscillations est donnée par la relation à connaître :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{9,81}} = 4 \text{ s.}$$

En 9 s Tarzan aura eut le temps de faire 2 oscillations complètes plus un quart d'oscillation.

En effet : $2T + T/4 = 9 \text{ s}$. Tarzan se trouvera donc à la position $\theta = 0^\circ$ (voir le tracé de la courbe $\theta = f(t)$).

2.5 Chute de grêle

Système : le grêlon

Référentiel : terrestre et galiléen

Repère : Oz orienté vers le bas, vecteur unitaire $\vec{u}_z$

1)a) Forces appliquées : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

Principe Fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}.$$

Projection sur Oz : $a = \ddot{z} = g$

On en déduit l'expression de v :

$$\ddot{z} = g \Rightarrow \dot{z} = v = gt + \text{cte}$$

Avec les conditions $t = 0$, $v(0) = 0$ la constante d'intégration est nulle :

$$\dot{z} = v = gt$$

De même on en déduit l'expression de z :

$$\dot{z} = v = gt \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + \text{cte}$$

Avec les conditions $t = 0$, $z(0) = 0$ la constante d'intégration est nulle :

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

b) La durée t_c de la chute correspond à $z = h$:

$$z = \frac{1}{2}gt_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On en déduit v_s : $v_s = gt_c = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$

$$\text{A.N. : } t_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 1500}{9,81}} = 17,5 \text{ s et } v_s = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1500} = 171,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_s = 617,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

c) La vitesse v_s est trop grande : le modèle n'est pas valide.

2)a) Forces appliquées : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ et la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

Principe Fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}.$$

Projection sur Oz :

$$ma = mg - \alpha v \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g$$

b) L'équation précédente est une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Pour la résoudre on applique la méthodologie suivante :

Résolution d'une équation différentielle avec second membre

- 1- Résoudre l'équation différentielle sans second membre (S1)
- 2- Trouver une solution particulière à l'équation avec second membre (S2). Remarque : si le second membre est constant la solution particulière est une constante simple à déterminer.
- 3- La solution générale de l'équation avec second membre sera $S = S1 + S2$
- 4- Déterminer les constantes en utilisant les conditions particulières (qui sont souvent les conditions initiales)
- 5- Donner la solution complète.

En utilisant la méthode précédente on a :

1- Résoudre l'équation différentielle sans second membre (S1)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}dt$$

On peut alors intégrer cette équation :

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\alpha}{m}dt \Rightarrow \ln v = -\frac{\alpha}{m}t + C$$

La constante d'intégration C peut toujours s'écrire : $C = \ln K$ où K est une constante d'intégration. On a alors :

$$\ln v - \ln K = -\frac{\alpha}{m}t \Rightarrow \ln \frac{v}{K} = -\frac{\alpha}{m}t \Rightarrow \frac{v}{K} = e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

D'où :

$$v = Ke^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (S1)$$

2- Solution particulière à l'équation avec second membre (S2).

En posant $v = v_o = \text{constante}$, on obtient :

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_o = g \Rightarrow 0 + \frac{\alpha}{m}v_o = g \Rightarrow v_o = \frac{mg}{\alpha} \quad (\text{S2})$$

3- Solution générale de l'équation avec second membre (S1 + S2)

$$v = Ke^{-\frac{\alpha}{m}t} + v_o$$

4- Détermination des constantes

On a : à $t = 0$, $v = 0$ d'où :

$$v(0) = Ke^0 + v_o = 0 \Rightarrow K = -v_o$$

5- Solution complète

$$v = -v_o e^{-\frac{\alpha}{m}t} + v_o = v_o \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) \text{ avec } v_o = \frac{mg}{\alpha}$$

$$\text{c) } v_l = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_o = \frac{mg}{\alpha}$$

$$\text{A.N. : } m = \rho_{\text{glace}} V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{glace}} \text{ et } \alpha = 6\pi R \eta_{\text{air}}$$

$$v_l = \frac{mg}{\alpha} = \frac{2R^2 \rho_{\text{glace}} g}{9\eta_{\text{air}}} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 917 \cdot 9,81}{9 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}} = 2777 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\approx 1000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

$$\text{On a : } m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{glace}} = \frac{4}{3}\pi (5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 917 = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{et } \alpha = 6\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,018 = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse limite est supérieure aux vitesses v_s mesurées

$$\text{d) } z = \int v_l \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) dt = v_l t + \frac{mv_l}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} + Cte$$

On a : à $t = 0$, $z = 0$ donc :

$$z(0) = 0 = 0 + \frac{mv_l}{\alpha} e^0 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{mv_l}{\alpha}$$

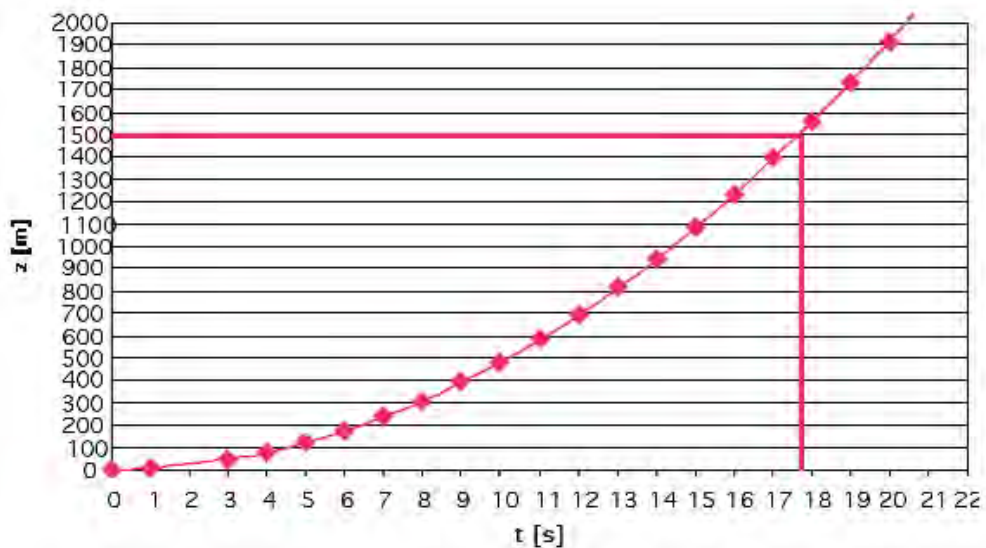
$$z = v_l t + \frac{mv_l}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mv_l}{\alpha} = \frac{mg}{\alpha} \left[t - \frac{m}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) \right]$$

e) On voit sur la courbe (voir figure suivante) qu'il faut environ un temps $t \approx 17,7$ s pour parcourir $h = 1\,500$ m.

Pour $t_c \approx 17,7$ s on a :

$$v_s = v_l \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t_c} \right) = v_l \left[1 - \exp \left(-\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-4}} 17,7 \right) \right]$$

$$v_s \approx 0,06 v_l = 167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$



f) Une fois encore la vitesse au sol est trop importante, ce modèle n'est donc pas valide.

3) On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme :

$\vec{f} = -\beta v \vec{v}$ avec $\beta = 0,225 \times \pi R^2 \rho_{\text{air}}$ où R est le rayon du grêlon et $\rho_{\text{air}} = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la densité de l'air.

a) *Forces appliquées* : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{u}_z$ et la force de frottement fluide $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$ avec $\beta = 0,225 \pi R^2 \rho_{\text{air}}$ (R est le rayon du grêlon et $\rho_{\text{air}} = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la densité de l'air).

Principe Fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a} \Rightarrow m \vec{a} = m \vec{g} - \beta v \vec{v}.$$

Projection sur Oz :

$$ma = mg - \beta v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g$$

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Cependant sa résolution est plus complexe qu'à la question 2).

b) On peut considérer la vitesse v comme une fonction de la variable z elle-même fonction du temps t .

La dérivée de v par rapport à au temps t s'écrit alors :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dv}{dz}.$$

De plus : avec $w(z) = v^2(z)$ on a : $\frac{dw}{dz} = \frac{dv^2}{dz} = 2v \frac{dv}{dz}$

Donc :

$$v \frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dw}{dz} = \frac{dv}{dt}$$

Finalement :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dw}{dz} + \frac{\beta}{m} w = g$$

$$\frac{dw}{dz} + \frac{2\beta}{m} w = 2g$$

c) Cette fois on retrouve une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant que l'on sait résoudre (voir question 2).

Les conditions initiales sont : à $z = 0$: $v = 0 \Rightarrow w = 0$, on obtient :

$$w(z) = \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{2\beta}{m}z} \right)$$

Et donc :

$$v(z) = \sqrt{w(z)} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{2\beta}{m}z} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d) La vitesse limite est obtenue en cherchant la limite pour z tendant vers l'infini :

$$v_l = \lim_{t \rightarrow \infty} v(z) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$$

A.N. :

$$\sqrt{\frac{mg}{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{glace}} g}{0,225 \cdot \pi R^2 \rho_{\text{air}}}} = \sqrt{\frac{4Rg\rho_{\text{glace}}}{0,675 \cdot \rho_{\text{air}}}} = \sqrt{\frac{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 917}{0,975 \cdot 1,6}}$$

$$v_l = 12,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 46,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Cette vitesse limite est une valeur compatible avec les mesures de v_s .

e) Pour obtenir v_s il suffit de calculer $v(h)$.

Calculons l'exposant de l'exponentielle : $2\beta h/m$

$$\beta = 0,225\pi R^2 \rho_{\text{air}} = 0,225 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1,6 = 2,83 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{et } m = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{On a donc : } \frac{2\beta}{m}h = \frac{2 \cdot 2,83 \cdot 10^{-5}}{4,8 \cdot 10^{-4}} 1500 = 125$$

On constate alors que $e^{-125} \approx 0$ soit

$$v_s = v_l = 12,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 46,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

f) Cette fois la vitesse au sol est similaire à celle mesurée expérimentalement. Ce dernier modèle peut donc être considéré comme une bonne approximation de la chute de grêlons.

CHAPITRE 3

Travail, puissance et énergie

PLAN	3.1 Travail d'une force 3.2 Énergie 3.3 Stabilité d'un système 3.4 Chocs entre particules 3.5 Récapitulatif
OBJECTIFS	➤ Savoir calculer le travail d'une force variable ou pas sur un déplacement quelconque ➤ Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique ➤ Savoir déterminer l'énergie potentielle dont dérive une force conservative. ➤ Savoir utiliser l'énergie mécanique d'un système pour résoudre des problèmes.

Dans ce chapitre nous allons introduire les notions importantes de travail d'une force et d'énergie mécanique. Nous verrons que ces deux grandeurs et les relations qui les relient peuvent être utilisées pour résoudre simplement des problèmes de mécanique.

3.1 TRAVAIL D'UNE FORCE

a) Définition

Lorsqu'on applique une force pour déplacer un objet l'effort qu'il faut fournir est d'autant plus important que la longueur du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. Le travail de la force est une grandeur qui va rendre compte de cet effort.

Notion de travail : cas d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Considérons une force $\vec{F}$ constante (en norme, sens et direction) appliquée sur un point matériel M se déplaçant sur un segment de droite AB .

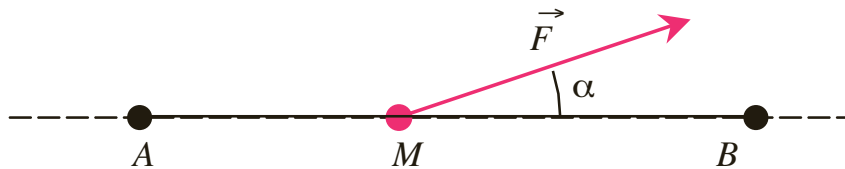


Figure 3.1 Déplacement du point d'application M d'une force constante sur un déplacement rectiligne.

Dans le cas où la force de norme F a même direction et sens que le déplacement $l = AB$, la force contribue au déplacement du point d'application. Le travail correspond alors au produit de la force F par la longueur du déplacement $l = AB$.

Si la force est perpendiculaire au déplacement, elle ne contribue pas au déplacement du point M . Cela sous entend qu'il existe d'autres forces permettant le déplacement du point. Le travail de la force sur ce déplacement est donc nul.

Enfin si la force a même direction mais est de sens contraire au déplacement $l = AB$, la force s'oppose au déplacement du point d'application.

Pour tenir compte de ces différents cas le travail de la force sur le déplacement AB se définit comme le produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement. On a donc :

$$\vec{F} = \overrightarrow{cste} \text{ sur } \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \\ W_{AB}(\vec{F}) = Fl \cos \alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

L'angle α est l'angle que fait le vecteur force $\vec{F}$ avec le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$ (voir figure 3.1).

On peut faire les remarques importantes suivantes :

- Parler du travail d'une force n'a de sens que si on précise le déplacement. La notation usuelle est la lettre W (initiale du mot anglais Work signifiant travail) en précisant en indice le déplacement et entre parenthèses la force.

- Le travail s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}$ c'est-à-dire en Joule (J).
1J correspond au travail d'une force de 1 N sur une distance de 1 m.
- Il y a un travail non nul lorsque la force agissant sur l'objet a une composante dans la direction du mouvement.
- Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement.
- Lorsque la force s'oppose au déplacement la force est résistante et le travail est négatif.
- Lorsque la force est motrice le travail est positif.
- Une force peut s'appliquer à un objet sans pour autant effectué un travail. Ainsi, il n'y a pas de travail lorsqu'il n'y a pas de déplacement de l'objet ($l = 0$) où lorsque la force est perpendiculaire à la direction du mouvement. La force ne contribue pas alors au déplacement de l'objet.



Exemple : lorsqu'on soulève un objet, le travail du poids de l'objet est non nul car le poids est parallèle au déplacement. Dans ce cas, il est résistant car il s'oppose au déplacement. Le travail du poids est nul lorsqu'on tient l'objet dans ses bras sans se déplacer ou en se déplaçant horizontalement. Si on lâche l'objet, il tombe sous l'effet de la pesanteur et le travail du poids est alors non nul et positif

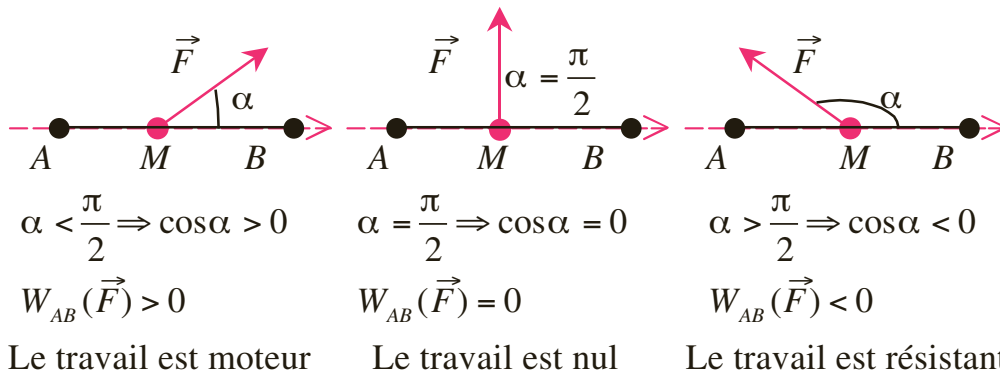


Figure 3.2 Travail moteur, nul et résistant d'une force.

Définition du travail élémentaire

On considère maintenant le cas plus général où la force $\vec{F} = \vec{F}(M)$ est fonction de la position du point d'application M qui se déplace d'un point A vers un point B sur une courbe quelconque (*figure 3.3*).

- Dans ce cas, pour calculer le travail correspondant de la force, il n'est plus possible d'utiliser l'expression (3.1). La méthode de calcul consiste alors à décomposer le trajet en une succession de déplacements élémentaires $d\vec{l}$ infiniment petits et donc rectilignes (voir *figure 3.2*). Ces trajets élémentaires sont suffisamment petits pour pouvoir considérer le vecteur force comme constant sur le déplacement et la définition (voir relation (3.1)) peut s'appliquer.

L'expression du travail élémentaire sur un tel déplacement élémentaire peut donc s'écrire :

$$\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

La définition du travail élémentaire δW de la force correspond à la définition plus générale de « circulation élémentaire du vecteur force ».

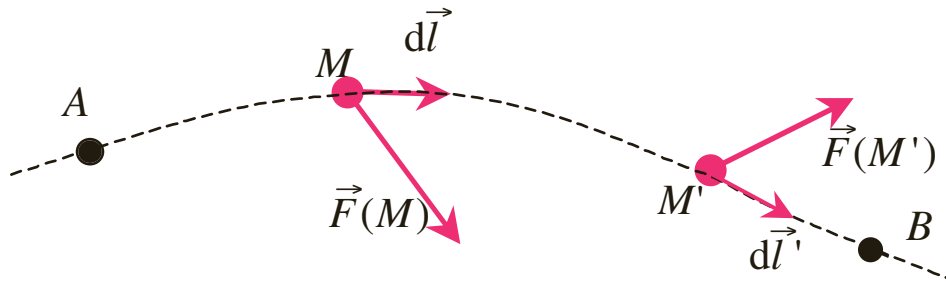


Figure 3.3 Force variable sur un déplacement AB quelconque. Sur un déplacement élémentaire suffisamment petit la force peut être considérée comme constante.

Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque



Pour obtenir le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}(M)$ sur le déplacement de A à B, il suffit d'additionner tous les travaux élémentaires entre le point de départ et le point d'arrivée. Cette sommation contenant une infinité de terme tous infiniment petits correspond à une intégration entre les points A et B :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} \quad (3.3)$$

b) Exemples de calcul du travail d'une force sur un trajet AB

Cas d'une force constante sur un trajet AB quelconque

Dans le cas particulier d'une force $\vec{F}$ constante, l'expression du travail se simplifie car on peut sortir $\vec{F}$ de l'intégrale.

On obtient donc dans ce cas :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} \quad (3.4)$$

L'addition de tous les vecteurs élémentaires $d\vec{l}$, mis bout à bout, en partant du point A pour atteindre le point B donne, en utilisant la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\int_A^B d\vec{l} = \overrightarrow{AB} \quad (3.5)$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha \quad (3.6)$$

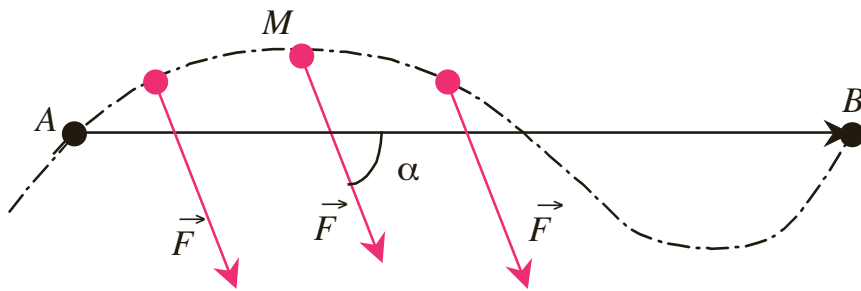


Figure 3.4 Cas d'une force constante : pour tout point M on a $\vec{F}(M) = \vec{F}$.



Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la distance directe AB et de l'angle α que fait la force avec le segment AB . Le calcul du travail sur le trajet direct AB aurait donné le même résultat.

Travail du poids d'un corps sur un trajet AB quelconque



Le poids d'un corps peut être considérée comme une force constante à la condition de rester dans une région de l'espace pas trop étendue. Cette force intervient à chaque fois qu'on étudie un système mécanique sur Terre. Pour cette raison, il est important de savoir effectuer le calcul du travail du poids d'un corps sur un déplacement donné.

Considérons un point M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B et calculons le travail du poids de ce corps au cours de ce déplacement (voir *figure 3.5*). Le déplacement de A à B est supposé quelconque c'est-à-dire que le chemin qui mène de A à B peut prendre différentes trajectoires.

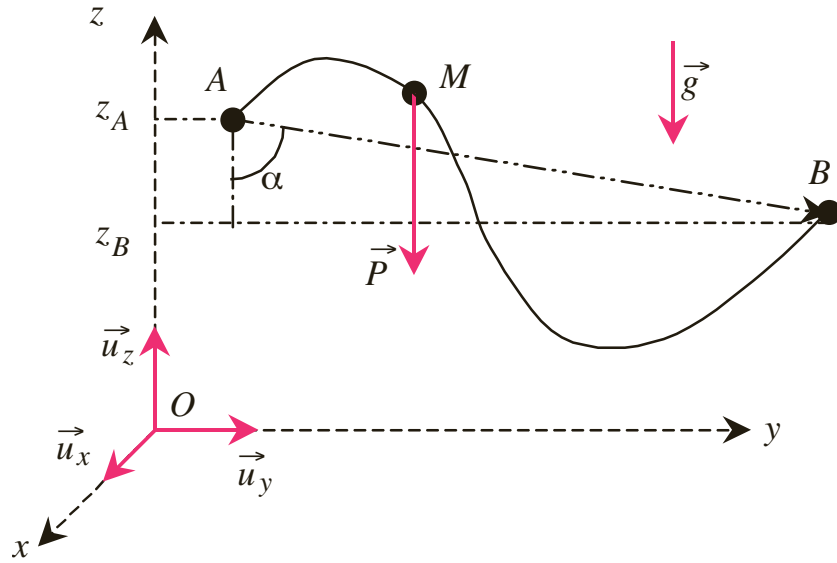


Figure 3.5 Travail du poids d'un corps.

D'après la relation (3.6), on peut écrire :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (3.7)$$

Le calcul du produit scalaire peut se faire de deux manières :

- En utilisant le cosinus de l'angle α entre $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg \cdot AB \cdot \cos \alpha \quad (3.8)$$

- En utilisant les composantes des vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du repère (O, x, y, z) (voir *figure 3.5*). **L'axe Oz est choisi vertical vers le haut.** Avec (x_A, y_A, z_A) les coordonnées du point de départ A et (x_B, y_B, z_B) celles du point d'arrivée B on a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ et } m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) \quad (3.10)$$

Les deux résultats sont identiques. En effet on peut remarquer que :

$$AB \cos \alpha = (z_A - z_B) \quad (3.11)$$

La différence d'altitude entre le point d'arrivée B et le point de départ A peut s'écrire :

$$\Delta h = z_B - z_A \quad (3.12)$$

L'expression du travail du poids en fonction de la différence d'altitude est donc :

$$W_{AB}(\vec{P}) = -mg\Delta h \quad (3.13)$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la différence d'altitude entre le point de départ et d'arrivée.

Si $\Delta h < 0$ alors $W_{AB}(\vec{P}) > 0$: Le point M descend et le travail du poids est moteur.

Si $\Delta h > 0$ alors $W_{AB}(\vec{P}) < 0$: Le point M monte et le travail est résistant.



Le travail du poids correspond donc au produit du poids par la hauteur séparant le point de départ du point d'arrivée. Il suffit ensuite de mettre le bon le signe : si l'arrivée est moins élevée que le départ le travail est moteur (signe +). Dans le cas contraire, il est résistant et le travail est alors négatif.

Cas d'une force variable : travail de la tension d'un ressort

Considérons un ressort de raideur k , de longueur au repos l_0 , au bout duquel est accrochée une masse m (voir *figure 3.6*). Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension du ressort.

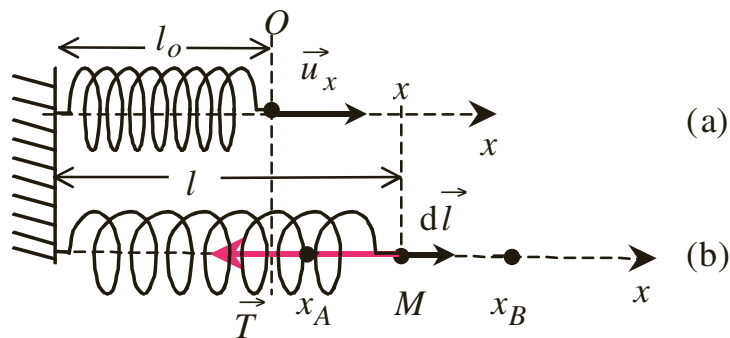


Figure 3.6 Le ressort ni comprimé, ni étiré, schéma (a), a une longueur à vide l_0 . Dans la position (b) sa longueur est l . Le vecteur $d\vec{l}$ représente un déplacement élémentaire du point M .

La force élastique $\vec{T}$, c'est-à-dire de la tension du ressort est une force qui varie avec l'état d'étirement du ressort de raideur k . On repère l'extrémité libre M du ressort sur un axe Ox de même direction que le ressort, le point origine O correspondant à la position du point

M lorsque le ressort est au repos (ni étiré, ni comprimé). Avec les conventions de la *figure 3.6* on peut écrire :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}_x = -k(l - l_o) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x \quad (3.14)$$

Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$ de l'extrémité M du ressort (voir *figure 3.6*). Le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx \vec{u}_x dx \vec{u}_x = -kx dx \quad (3.15)$$

Le travail de la tension du ressort lorsque le point M passe de l'abscisse x_A à l'abscisse x_B est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{T}) &= \int_A^B -kx dx = -k \int_A^B x dx \\ W_{AB}(\vec{T}) &= -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort.

c) Puissance d'une force

Un même travail peut être réalisé plus ou moins rapidement. La puissance $\mathcal{P}$ d'une force correspond au travail effectué par cette force par unité de temps et renseigne sur la rapidité avec laquelle le travail (transfert d'énergie) est effectué.



Un avion de chasse n'a pas obligatoirement plus d'énergie dans son réservoir à carburant qu'un petit avion de tourisme, il est juste capable de transférer cette énergie plus rapidement. Car sa puissance est plus importante.

Si W est le travail effectué pendant la durée Δt , la puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ de la force est définie par :

$$\mathcal{P}_m = \frac{W}{\Delta t} \quad (3.17)$$

L'unité de puissance est le Watt (symbole W) correspondant à un travail de 1J effectué en 1 s.

Soit δW le travail effectué par une force $\vec{F}$ pendant la durée élémentaire (infinitement petite) dt . La puissance de cette force à l'instant t correspond à la puissance instantanée et s'écrit :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.18)$$

On a donc aussi :

$$\delta W = \mathcal{P}(t)dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B \delta W = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (3.19)$$

3.2 L'ÉNERGIE EN MÉCANIQUE

Deux types d'énergie seront introduites ici : l'énergie cinétique (E_c) liée au mouvement de l'objet et l'énergie potentielle (E_p) liée à sa position. L'énergie mécanique (E) d'un système est alors définie par la somme des énergies cinétique et potentielle.

a) L'énergie cinétique : une énergie liée au mouvement

Introduction

Considérons un point matériel G , de masse m , se déplaçant, dans un référentiel galiléen (R), sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \quad (3.20)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \delta W = \sum (\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}) = \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) \cdot d\vec{l} \quad (3.21)$$

En utilisant la relation (3.20) la relation (3.21) s'écrit :

$$\sum \delta W = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot d\vec{l} = m d\vec{v}_G \frac{d\vec{l}}{dt} = m \vec{v}_G \cdot d\vec{v}_G \quad (3.22)$$

Considérons maintenant un trajet AB effectué par le point G . En notant $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vecteurs vitesse de G respectivement au point A

et au point B , l'intégration du deuxième membre de la relation (3.22) donne :

$$m \int_{v_A}^{v_B} \vec{v}_G \cdot d\vec{v}_G = m \left[\frac{1}{2} v_G^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (3.23)$$

L'intégration du premier membre de la relation (3.22) s'écrit :

$$\int_A^B (\sum \delta W) = \sum_A^B \int (\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext}) \quad (3.24)$$

L'égalité des relations (3.23) et (3.24) conduit à :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \quad (3.25)$$



Ainsi le travail total de toutes les forces appliquées au point G entre deux positions A et B peut s'exprimer uniquement en fonction de la masse et des vitesses au point de départ A et d'arrivée B . Il apparaît donc intéressant de définir une fonction d'état ne dépendant que de la masse et de la vitesse du point. Cette nouvelle grandeur homogène à un travail est appelée énergie cinétique.

Définition de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique E_c pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen, par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.26)$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre une position A et une position B , est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points :

$$\left[\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \right] \quad (3.27)$$

Ce théorème est très utile pour déterminer la vitesse d'une masse ponctuelle m en un point particulier (B) connaissant sa vitesse en un

autre point (A) ceci sans passer par les équations horaires du mouvement.

b) L'énergie potentielle : une énergie liée à la position



L'énergie potentielle est une forme d'énergie liée à la position du système. En changeant de position, cette énergie peut augmenter (le système emmagasine de l'énergie) ou diminuer (le système restitue de l'énergie à l'extérieur).

On peut donner l'exemple simple d'une masse qu'on lâche d'une certaine altitude : celle-ci en tombant (diminution de l'altitude) voit sa vitesse augmenter. La masse avait donc potentiellement de l'énergie qui a été restituée sous forme d'énergie cinétique au cours de la chute. La seule force exercée alors sur la masse est son poids qui fournit un travail positif indépendant du chemin suivi et lié uniquement à la diminution d'altitude.

Tout comme pour l'énergie cinétique définie à partir de sa variation liée au travail de toutes les forces, l'énergie potentielle va être définie à partir de sa diminution liée au travail de certaines forces : celles dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.

Forces conservatives

Ce sont les forces (notée $\vec{F}_{ext}^C$) dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiale (point de départ) et finale (point d'arrivée).

On peut citer comme exemples rencontrés au début de ce chapitre :

- travail du poids
- travail de la tension du ressort
- travail d'une force constante (en norme et en direction)

Forces non conservatives

Ce sont toutes les autres forces (notée $\vec{F}_{ext}^{NC}$) dont le travail dépend du chemin suivi.

On peut citer comme exemple les forces de frottement. Le travail de ces forces est toujours résistant (travail négatif $W < 0$).

Prenons le cas d'une force de frottement $\vec{F}$ de type solide. Cette force s'oppose continuellement au déplacement (voir le chapitre 2 sur

les forces) et sa norme F est constante. Le vecteur force sera un vecteur de même direction mais de sens opposé au vecteur déplacement élémentaire.

Le calcul du travail de la force de frottement solide donne :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -F dl \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B F dl = -F \int_A^B dl = -FL_{AB}$$

La longueur L_{AB} est la distance effectivement parcourue entre A et B . Cette distance dépend évidemment du chemin suivi.

Définition de l'énergie potentielle

Le travail $W_{AB}(\vec{F}_{ext}^C)$ d'une force conservative $\vec{F}_{ext}^C$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (état A) et final (B). Ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état E_P (fonction ne dépendant que de l'état du système) appelée *énergie potentielle*.

Par définition : pour une force conservative $\vec{F}_{ext}^C$ il existe une fonction d'état E_P telle que :

$$W_{AB}(\vec{F}_{ext}^C) = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P \quad (3.28)$$

La variation d'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points.

Définition intégrale de l'énergie potentielle

La relation précédente conduit, en explicitant le travail, à l'expression intégrale de l'énergie potentielle :

$$E_P(B) - E_P(A) = - \int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} \quad (3.29)$$

Ceci peut encore s'écrire en multipliant par (-1) chaque membre de l'égalité (3.29) :

$$\int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} = E_P(A) - E_P(B) \quad (3.30)$$



La différence de potentielle $E_P(A) - E_P(B)$ entre deux positions A et B correspond au travail également de A à B (prendre le même ordre des positions) de la force conservative associée à cette énergie.

Définition différentielle de l'énergie potentielle

De l'expression intégrale, on peut déduire l'expression différentielle de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative. On aura alors :

$$\delta W(\vec{F}_{ext}^C) = \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} = -dE_P \quad (3.31)$$

Définition locale de l'énergie potentielle

La différentielle de la fonction énergie potentielle peut s'écrire en fonction du gradient de cette fonction (voir encart 3.1) :

$$dE_P = \vec{\text{grad}} E_P \cdot d\vec{l} = -\vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_{ext}^C = -\vec{\text{grad}} E_P \quad (3.32)$$

$$\vec{F}_{ext}^C = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3.33)$$



Dans le cas où l'énergie potentielle ne dépend, par exemple, que d'une variable x on a :

$$\vec{F}_{ext}^C = -\frac{dE_P}{dx} \vec{u}_x \quad (3.34)$$

La force est dirigée vers les énergies potentielles décroissantes.



L'énergie potentielle est définie à partir d'une comparaison avec une différence (définition intégrale) ou bien d'une intégration (définition différentielle ou locale). Cela signifie que cette fonction est définie à une constante près. Cette constante n'a pas d'importance car l'énergie potentielle intervient toujours par des différences.

Encart 3.1 Le vecteur gradient d'une fonction

Soit une fonction $f(x)$ d'une variable x . La différentielle de cette fonction s'écrit : $df = \frac{df}{dx} dx$. Cette différentielle nous renseigne sur la variation de la fonction pour une variation élémentaire dx de la variable x .

Lorsque la fonction dépend de trois variables (x, y, z) la différentielle s'obtient en fixant à tour de rôle deux variables sur les trois.

- *Différentielle partielle* : on considère une variation élémentaire de la variable x , les variables y et z étant fixées. La fonction peut être considérée comme une fonction d'une variable. On appelle alors dérivée partielle de la fonction par rapport à x la dérivée obtenue en considérant y et z comme des constantes. La notation est :

Dérivée partielle de f par rapport à x : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$

Il est alors possible d'exprimer la différentielle dite partielle en fonction de cette dérivée et notée : $\partial_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx$.

La même opération peut être effectuée avec y (x et z étant fixées) puis z (x et y fixées). L'expression de la différentielle totale de la fonction correspondant alors à la somme des différentielles partielles c'est-à-dire :

$$df = \partial_x f + \partial_y f + \partial_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz.$$

On définit alors le vecteur gradient de la fonction, en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En remarquant que $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$, la différentielle totale de la fonction peut s'écrire comme le produit scalaire de deux vecteurs :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}$$

- *Signification* : soit la surface définie par $f(x,y,z) = \text{constante}$. Si le point M se déplace sur la surface le vecteur $d\overrightarrow{OM}$ appartient à cette surface. La différentielle d'une constante étant nulle on a aussi $df = 0$. On a donc : $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$

Le vecteur gradient est un vecteur perpendiculaire aux surfaces définies par $f(x,y,z) = \text{constante}$. Il est orienté vers les valeurs croissantes de la fonction.

c) L'énergie potentielle de pesanteur

Expression (méthode intégrale)

En reprenant les résultats (relation 3.10) obtenus dans la partie 3.1.b) nous avons, avec l'axe Oz axe vertical ascendant :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = mgz_A - mgz_B \quad (3.35)$$



Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi. C'est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_{pp} , fonction d'état qui ne dépend que de la position du centre d'inertie du système matériel.

La définition intégrale 3.28 s'écrit :

$$W_{AB}(\vec{P}) = E_{pp}(A) - E_{pp}(B) = -\Delta E_{pp} \quad (3.36)$$

En comparant les relations (3.35) et (3.36), l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur lorsque le centre d'inertie se trouve à l'altitude z peut s'écrire :

$$E_{pp}(z) = mgz + \text{constante} \quad (3.37)$$

Cette énergie est définie à une constante près. Celle-ci peut être fixée en choisissant une origine pour l'énergie potentielle. En général, on s'arrange, si cela est possible, pour prendre la constante nulle. Dans ce cas, il suffit de choisir une énergie potentielle nulle à l'altitude $z = 0$. alors :

$$\begin{cases} E_{pp}(z) = mgz \\ \text{avec } E_{pp}(0) = 0 \\ \text{axe } Oz \text{ orienté vers le haut} \end{cases} \quad (3.38)$$



Si l'axe Oz est orienté vers le bas (axe vertical descendant) nous obtenons :

$$E_{pp}(z) = -mgz$$

Ce qu'il faut retenir :

L'énergie potentielle de pesanteur augmente quand le système matériel s'éloigne de la terre (quand l'altitude augmente)

Expression (méthode différentielle)

L'expression du travail élémentaire du poids d'un corps est :

$$\delta W(\vec{P}) = m \vec{g} \cdot d\vec{l} \quad (3.39)$$

En considérant un repère (O, x, y, z) avec un axe Oz vertical orienté vers le haut, cette expression devient :

$$\delta W(\vec{P}) = -mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \quad (3.40)$$

$$\delta W(\vec{P}) = -mgdz = -d(mgz)$$

Le travail élémentaire du poids d'un corps apparaît comme la différentielle d'une fonction. En comparant avec la définition différentielle (relation 3.31) on obtient :

$$\delta W(\vec{P}) = -d(mgz) = -d(E_{pp}) \quad (3.41)$$

$$E_{pp} = mgz + \text{constante}$$

On retrouve évidemment la même expression.

Interprétation de l'énergie potentielle de pesanteur

Pour amener une masse d'une altitude $z = 0$ à une altitude z il faut qu'un opérateur exerce une force $\vec{F}_{op}$ au moins juste égale et opposée au poids : $\vec{F}_{op} = -\vec{P}$.

Le travail que l'opérateur va fournir est donc :

$$W_{0 \rightarrow z}(\vec{F}_{op}) = \int_0^z \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l} = \int_0^z -\vec{P} \cdot d\vec{l} = -W_{0 \rightarrow z}(\vec{P}) \quad (3.42)$$

$$W_{0 \rightarrow z}(\vec{F}_{op}) = -[E_{pp}(0) - E_{pp}(z)] = E_{pp}(z) = mgz$$

L'énergie potentielle de la masse à l'altitude z correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fourni pour l'amener à cette altitude. La masse a emmagasiné cette énergie qu'elle pourra restituer en retombant.

d) L'énergie potentielle élastique

Expression (méthode intégrale)

En reprenant les résultats (relation 3.16 et *figure 3.6*) obtenus dans la partie 3.1.b) le travail de la tension d'un ressort s'écrit :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \quad (3.43)$$

Dans cette expression, x_A représente l'allongement $\Delta L = L_A - L_o$ du ressort lorsque son extrémité libre est en A et x_B l'allongement $\Delta L = L_B - L_o$ lorsque l'extrémité libre est en B .

Le travail de la tension du ressort ne dépend pas du chemin suivi. C'est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_{PE} , fonction d'état qui ne dépend que de la position de l'extrémité libre du ressort.

La définition intégrale 3.28 s'écrit :

$$W_{AB}(\vec{T}) = E_{PE}(A) - E_{PE}(B) = -\Delta E_{PE} \quad (3.44)$$

En comparant les relations (3.43) et (3.44), l'expression de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort présente un allongement x peut s'écrire :

$$E_{PE}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{constante} \quad (3.45)$$

Il est logique de choisir l'énergie potentielle nulle pour une déformation nulle : $E_{PE}(0) = 0$. La constante est alors nulle. Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{PE}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \\ \text{allongement } x = \Delta l = l - l_o \end{array}} \quad (3.46)$$

Expression (méthode différentielle)

L'expression du travail élémentaire de la tension du ressort est :

$$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} \quad (3.47)$$

On repère l'extrémité libre M du ressort sur un axe Ox de même direction que le ressort, le point origine O correspondant à la position du point M lorsque le ressort est au repos (ni étiré, ni comprimé). Avec les conventions de la *figure 3.6* on peut écrire :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}_x = -k(l - l_o) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x \quad (3.48)$$

Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$ de l'extrémité M du ressort (voir *figure 3.6*). Le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx \vec{u}_x dx \vec{u}_x = -kx dx \quad (3.49)$$

$$\delta W = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \quad (3.50)$$

Le travail élémentaire de la tension du ressort apparaît comme la différentielle d'une fonction. En comparant avec la définition différentielle (relation 3.31) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{T}) &= -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -d(E_{PE}) \\ E_{PE} &= \frac{1}{2}kx^2 + \text{constante} \end{aligned} \quad (3.51)$$

On retrouve évidemment la même expression.



Dans cette expression x représente l'allongement (ou la compression) du ressort. Un choix différent de l'origine des abscisses conduirait à une expression différente de cette énergie potentielle. Il vaut donc mieux retenir le résultat en introduisant l'allongement du ressort $\Delta l = l - l_o$:

$$E_{PE} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Interprétation de l'énergie potentielle élastique

Pour allonger le ressort de la longueur à vide l_o à la longueur l , il faut qu'un opérateur exerce une force $\vec{F}_{op}$ au moins juste égale et opposée à la tension du ressort : $\vec{F}_{op} = -\vec{T}$.

Le travail que l'opérateur va fournir est donc :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_{op}) &= \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l} = -\vec{T} \cdot d\vec{l} = -\delta W(\vec{T}) \\ W_{0 \rightarrow \Delta l}(\vec{F}_{op}) &= -W_{0 \rightarrow \Delta l}(\vec{T}) = -[E_{PE}(0) - E_{PE}(\Delta l)] \quad (3.52) \\ W_{0 \rightarrow \Delta l}(\vec{F}_{op}) &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle du ressort déformé correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fournie pour l'amener dans cet état. Le ressort a emmagasinée cette énergie qu'il pourra restituer en retournant vers son état à vide, ni étiré, ni allongé.

e) Force conservative et énergie potentielle

Il est possible, connaissant l'expression de l'énergie potentielle E_P de retrouver l'expression de la force $\vec{F}_{ext}^C$ qui en dérive. Il suffit d'utiliser la définition locale de l'énergie potentielle (relation 3.32) :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext}^C &= -\vec{\text{grad}} E_P \\ \vec{\text{grad}} E_P &= \frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{u}_z \end{aligned} \quad (3.53)$$


Exemple 1 : Cas du poids et de l'énergie potentielle de pesanteur :

Avec un axe vertical ascendant, on a : $E_{PP} = mgz$ (fonction uniquement de z) :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_{PP} = -\frac{\partial E_{PP}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial E_{PP}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial E_{PP}}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dE_{PP}}{dz} \vec{u}_z \\ \vec{P} &= -\frac{d(mgz)}{dz} \vec{u}_z = -mg \vec{u}_z\end{aligned}$$

Exemple 2 : Cas de la tension d'un ressort et de l'énergie potentielle élastique :

Avec x l'allongement du ressort, on a : $E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$ (fonction uniquement de x) :

$$\begin{aligned}\vec{T} &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_{PE} = -\frac{\partial E_{PE}}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial E_{PE}}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial E_{PE}}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{dE_{PE}}{dx} \vec{u}_x \\ \vec{T} &= -\frac{d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{dx} \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x\end{aligned}$$

f) L'énergie mécanique

Travail et énergie

Soit un point matériel M de masse m subissant un ensemble de forces extérieures $\vec{F}_{ext}$. Celles-ci peuvent se décomposer en forces conservatives $\vec{F}_{ext}^C$ et non conservatives $\vec{F}_{ext}^{NC}$.

Considérons maintenant un déplacement du point M d'une position A à une position B . Le travail total de toutes les forces pour ce déplacement est relié à la variation d'énergie cinétique par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) &= \Delta E_c \\ \Rightarrow \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) &= E_c(B) - E_c(A) \quad (3.54)\end{aligned}$$

Le travail des forces conservatives peut s'exprimer en fonction de l'énergie potentielle dont elles dérivent. Notons E_p l'énergie potentielle totale, somme des énergies potentielles dont dérive chaque force conservative, on peut écrire :

$$\sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C) = E_p(A) - E_p(B) \quad (3.55)$$

En reportant cette relation (3.55) dans l'égalité (3.54) on a :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) + [E_p(A) - E_p(B)] \quad (3.56)$$

$$[E_c(B) - E_c(A)] + [E_p(B) - E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (3.57)$$

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (3.58)$$

Il apparaît une nouvelle fonction d'état homogène à une énergie et dont la variation s'exprime en fonction uniquement du travail des forces non conservatives. Cette nouvelle fonction correspond à l'énergie mécanique.

Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle. C'est une fonction d'état : $E = E_c + E_p$

Théorème de l'énergie mécanique

Du résultat (3.58) on en déduit le théorème suivant :

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E = E(B) - E(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (3.59)$$



Les forces non conservatives étant des forces résistantes ($W < 0$) l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer au cours du temps.

Système conservatif et conservation de l'énergie mécanique

Un système est dit conservatif si ce système ne subit que des forces extérieures conservatives.

Le système ne subissant aucune force non conservative, les forces de frottement sont nulles ou négligeables. Le système est dit aussi « *mécaniquement isolé* ».

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique (3.59) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta E = E(B) - E(A) &= \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) = 0 \\ \Delta E = 0 &\Rightarrow E = \text{constante} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Théorème de l'énergie mécanique pour un système conservatif :
L'énergie mécanique d'un système conservatif (ou mécaniquement isolé) se conserve au cours du temps.

$$\text{Système conservatif} \Rightarrow E = E_c + E_p = E_o = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

Ceci constitue le principe de conservation de l'énergie mécanique.

g) Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème

Considérons le cas d'une bille M de masse m située à l'altitude $z_A = h$ et qu'on lâche sans donner de vitesse initiale. Trouver la vitesse de cette bille lorsqu'elle touche le sol en B altitude $z_B = 0$. Déterminer sa vitesse v en fonction de son altitude z .

- Système : la bille M de masse m
- Référentiel terrestre galiléen. Choix d'un repère : axe vertical ascendant avec le point B au sol (altitude $z_B = 0$) et le point A à l'altitude $z_A = h$ (voir *figure 3.7*).
- Bilan des forces : uniquement le poids de la bille : $\vec{P} = m\vec{g}$ (on néglige les frottements).

Le poids est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle. Avec un axe vertical ascendant on a : $E_{pp} = mgz$ avec l'énergie potentielle nulle au sol ($E_{pp}(B) = E_{pp}(z_B = 0) = 0$)

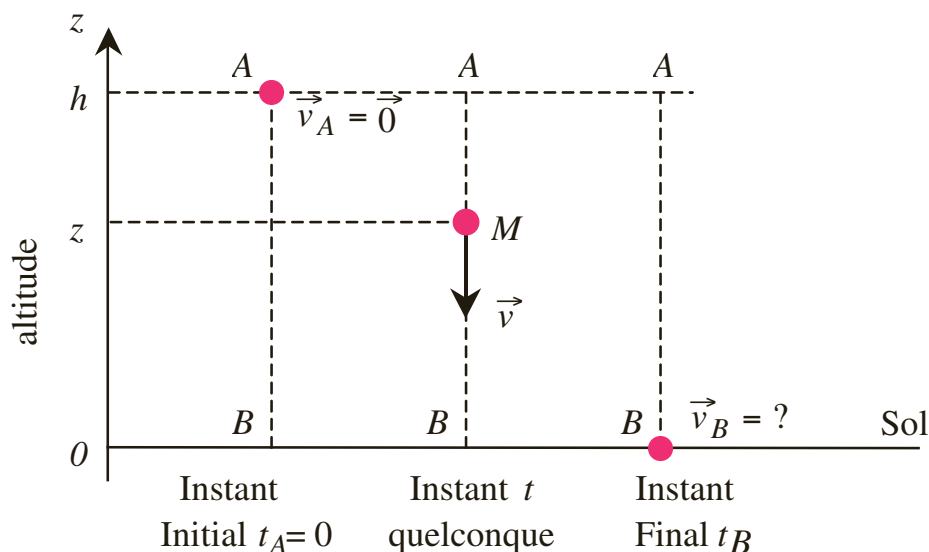


Figure 3.7 Chute libre d'une bille repérée par son altitude z .

Calcul en utilisant le théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les positions A de départ et B d'arrivée.

- Le travail du poids s'écrit : $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$



On peut vérifier que ce travail est bien positif puisque la masse se déplace dans le sens du poids.

- La variation d'énergie cinétique (énergie cinétique finale – énergie cinétique initiale) s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

L'application du théorème entre la position A et une position intermédiaire quelconque en M donne :

- Le travail du poids s'écrit : $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z) = mg(h - z)$

- La variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(M) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv^2$$

- Théorème de l'énergie cinétique donne : $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - z)$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g(h - z)}$$

Calcul en utilisant la conservation de l'énergie

Le système est conservatif donc il y a conservation de l'énergie mécanique. Exprimons cette énergie aux différents points A , M et B :

- Point A : $E(A) = E_C(A) + E_{PP}(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = mgh$

- Point M : $E(M) = E_C(M) + E_{PP}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

- Point B : $E(B) = E_C(B) + E_{PP}(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E(A) = E(M) = E(B) = E_o \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\text{On en déduit : } \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

$$\text{De même : } mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \Rightarrow v = \sqrt{2g(h-z)}$$

Conservation de l'énergie et accélération

L'énergie mécanique étant constante sa dérivée par rapport au temps est nulle. L'énergie mécanique à un instant quelconque s'écrit :

$$E = E_C(M) + E_{PP}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique correspond à la somme des dérivées des énergies cinétique et potentielle.

► Dérivée de l'énergie cinétique : $\frac{dE_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt}$

En appliquant la règle de dérivation d'une fonction au carré on a :

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2}m\left(2v\frac{dv}{dt}\right) = mva$$

► Dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_{PP}}{dt} = \frac{d}{dt}(mgz) = mg\frac{dz}{dt} = mgv$$

► Dérivée de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_{PP}}{dt} = mva + mgv = 0 \Rightarrow a = g$$

Ce résultat s'obtient simplement en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Cependant cette méthode peut dans certain cas être très pratique pour déterminer l'accélération du centre d'inertie d'un système.

3.3 ÉTATS LIÉS ET STABILITÉ D'UN SYSTÈME MÉCANIQUEMENT ISOLÉ

a) Les états liés

Lorsqu'un système est conservatif, son énergie mécanique se conserve. On a donc pour un tel système :

$$E = E_C + E_P = \text{constante} \quad (3.60)$$

Par définition, l'énergie cinétique étant une grandeur nécessairement positive, nous obtenons une condition restreignant les états énergétiques possibles du système. Cette condition de restriction définit ce que l'on appelle les états liés du système.

Ces états sont définis par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 > 0 \Rightarrow E - E_P > 0 \quad (3.61)$$



Exemple : Reprenons l'exemple d'une masse accrochée à un ressort et dont l'allongement correspond à la variable x (figure 3.6). Les états liés du système sont alors définis par :

$$E - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{2E}{k}} = -x_m \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}} = x_m$$

Les valeurs de x en dehors de cet intervalle sont inaccessibles au système qui est dit enfermé dans un puits de potentiel à cause de la forme prise par la fonction énergie potentielle.

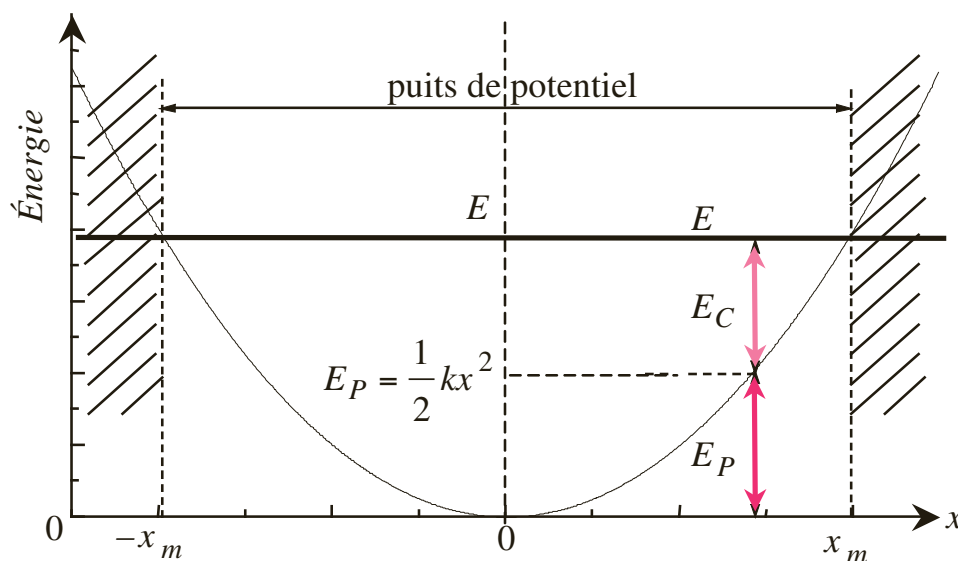


Figure 3.8 Graphe des énergies en fonction de l'allongement x d'un ressort.

b) Stabilité d'un système soumis à une force conservative

Pour un système soumis uniquement à une force résultante conservative, la forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Dans le cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x , cela revient à dire que :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dx}$$

La condition d'équilibre se traduisant par $\vec{F} = \vec{0}$ peut donc s'écrire aussi : $\frac{dE_p}{dx} = 0$.

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle.

Un équilibre est stable si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celui-ci y retourne spontanément.

Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

- S'il existe un équilibre stable pour $x = x_o$, alors $E_p(x)$ est minimale pour $x = x_o$. On a donc :

$$\text{Équilibre stable pour } x = x_o \Leftrightarrow \frac{dE_p}{dx}(x_o) = 0 \text{ et } \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_o) > 0$$

- S'il existe un équilibre instable pour $x = x_o$, alors $E_p(x)$ est maximale pour $x = x_o$. On a donc :

$$\text{Équilibre instable pour } x = x_o \Leftrightarrow \frac{dE_p}{dx}(x_o) = 0 \text{ et } \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_o) < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue donc spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

c) Exemple d'un bille sur un sol en forme de cuvette

On considère le cas d'une bille pouvant rouler sur un sol présentant un profil en forme de cuvette (voir la *figure 3.9 (a)*). Le poids dérive

de l'énergie potentielle $E_p = mgz$ avec un axe Oz dirigé vers le haut et en prenant l'origine des énergies potentielles au fond de la cuvette en $z = 0$ (voir *figure 3.9 (b)*).

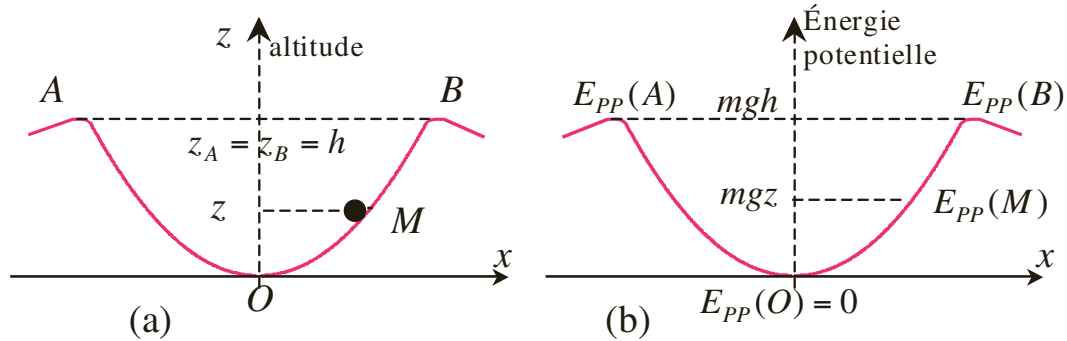


Figure 3.9 Le graphe (a) représente le profil du sol (altitude z) en fonction d'une abscisse x . Le graphe (b) représente l'énergie potentielle en fonction de la position.

L'énergie potentielle est minimale au fond de la cuvette (altitude la plus basse possible). Cette position correspond à la position d'équilibre stable de la bille M . Les positions A et B correspondant à des altitudes maximales sont des positions d'équilibre instable. À la moindre perturbation dirigée vers la cuvette, la bille placée en A ou en B quittera cette position pour se diriger vers la position d'équilibre stable O .

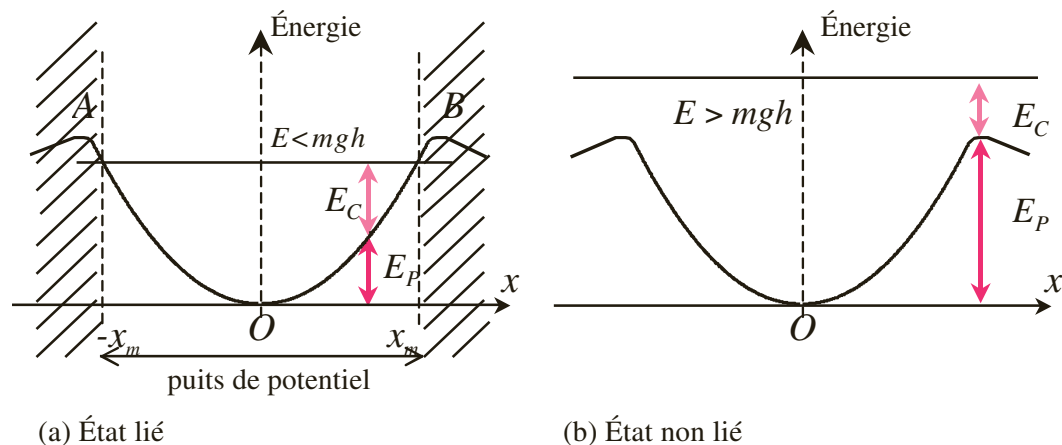


Figure 3.10 (a) État lié ($E < mgh$) et (b) État non lié ($E > mgh$).

Si l'énergie mécanique de la bille est inférieure à l'énergie potentielle maximale mgh (voir *figure 3.10 (a)*), la bille est prise dans un puits de potentiel. Elle ne pourra évoluer qu'entre les valeurs $-x_m$ et x_m . Si son énergie mécanique est supérieure à l'énergie potentielle en A ou B , elle pourra quitter la cuvette : l'état est non lié (*figure 3.10 (b)*).

3.4 CHOCS ENTRE PARTICULES

a) Définition

Dans un référentiel galiléen, on considère deux particules matérielles indépendantes de masse m_1 et m_2 . Les particules prises séparément sont mécaniquement isolées ou pseudo isolées et sont donc animées d'un mouvement rectilignes et uniformes (principe d'inertie). On note alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ leurs vecteurs vitesses respectives. Si les deux particules viennent à se rencontrer, on dit qu'il y a choc (voir *figure 3.11*).

Après le choc (durée très courte) les particules sont de nouveau mécaniquement isolées ou pseudo isolées et retrouvent donc un mouvement rectiligne uniforme mais avec de nouvelles vitesses $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$.

Que peut-on dire sur ces vitesses ? Pour donner une réponse il faut rechercher les grandeurs physiques qui pourraient se conserver.

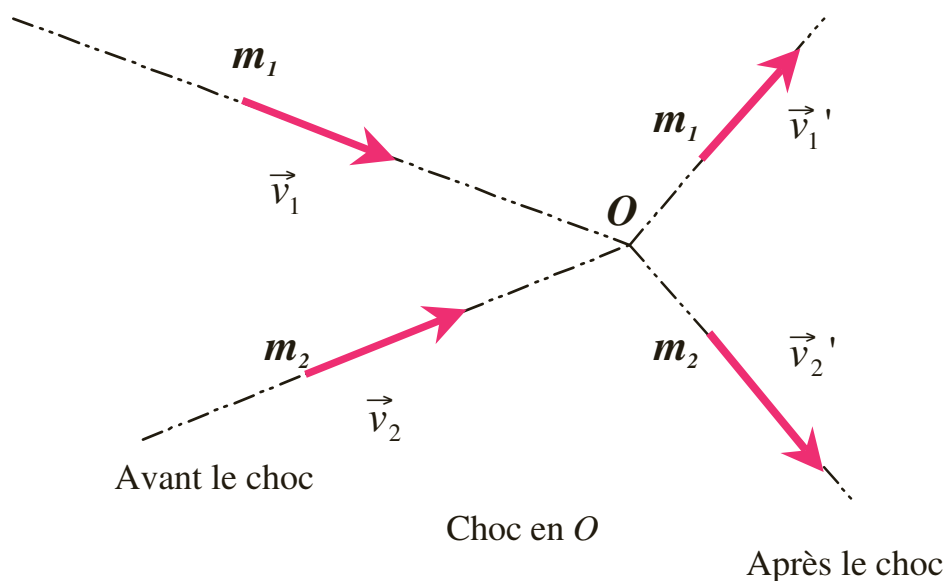


Figure 3.11 Choc entre deux particules de masse m_1 et m_2

Cette expérience peut se réaliser avec deux mobiles autoporteurs sur un plan horizontal. Les mobiles sont pseudo isolés et le mouvement du centre d'inertie de chacun sera rectiligne uniforme comme pour les deux particules isolées.

On ne considère ici que des chocs au cours desquels la masse de chaque particule reste inchangée. On exclut donc, dans cette étude, les réactions nucléaires.

b) Propriétés des chocs

La particule m_1 est mécaniquement isolée avant et après le choc. Pendant le choc, la particule m_1 subit une action de la part de m_2 (action extérieure) et n'est donc plus isolée. Il en est de même pour la particule m_2 .

Maintenant, si on considère le système formé de l'ensemble $\{m_1, m_2\}$, celui-ci est isolé du début jusqu'à la fin puisque aucune action extérieure n'est exercée sur le système. Le choc correspond à des interactions entre les différentes parties constituant le système et sont donc des actions intérieures au système.

Conservation du vecteur quantité de mouvement totale

Le système $\{m_1, m_2\}$ étant pseudo isolé, on a d'après le principe d'inertie conservation du vecteur quantité de mouvement totale du système. Le vecteur quantité de mouvement totale correspond à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chaque particule. On peut donc écrire une première relation en exprimant cette quantité de mouvement totale avant le choc et après le choc. On a :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.62)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (3.63)$$



La loi de conservation de la quantité de mouvement est extrêmement générale et est aussi valable lorsque le choc donne naissance à deux nouvelles particules de masses m_1' et m_2' . On écrit alors : $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1' \vec{v}_1' + m_2' \vec{v}_2'$.

Cette relation est une relation vectorielle. Elle correspond donc dans un repère d'espace à trois équations algébriques.

Choc élastique : conservation de l'énergie cinétique

Chacune des particules peut posséder de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle est une fonction d'état ne dépendant que de la position de la particule concernée. Le choc étant toujours de durée assez brève, la position des particules ne change pas pendant ce choc et leurs énergies potentielles ne varient pas. La variation d'énergie mécanique correspond alors à la variation d'énergie cinétique.

Dans le cas d'un choc dit élastique il y a conservation de l'énergie c'est-à-dire conservation de l'énergie cinétique.

$$E_C(\text{avant}) = E_C(\text{après}) \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \vec{v}_2'^2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (3.64)$$

Choc inélastique : l'énergie cinétique ne se conserve pas

Dans le cas d'un choc dit inélastique il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique.

Au cours du choc il y a perte d'énergie par échauffement. L'énergie cinétique diminue. On a donc :

$$\frac{E_C(\text{après})}{E_C(\text{avant})} = \varepsilon \text{ avec } 0 \leq \varepsilon < 1$$

Le cas $\varepsilon = 1$ correspond au choc élastique.

Le choc mou est un choc inélastique pour lequel les deux particules restent liées après le choc.

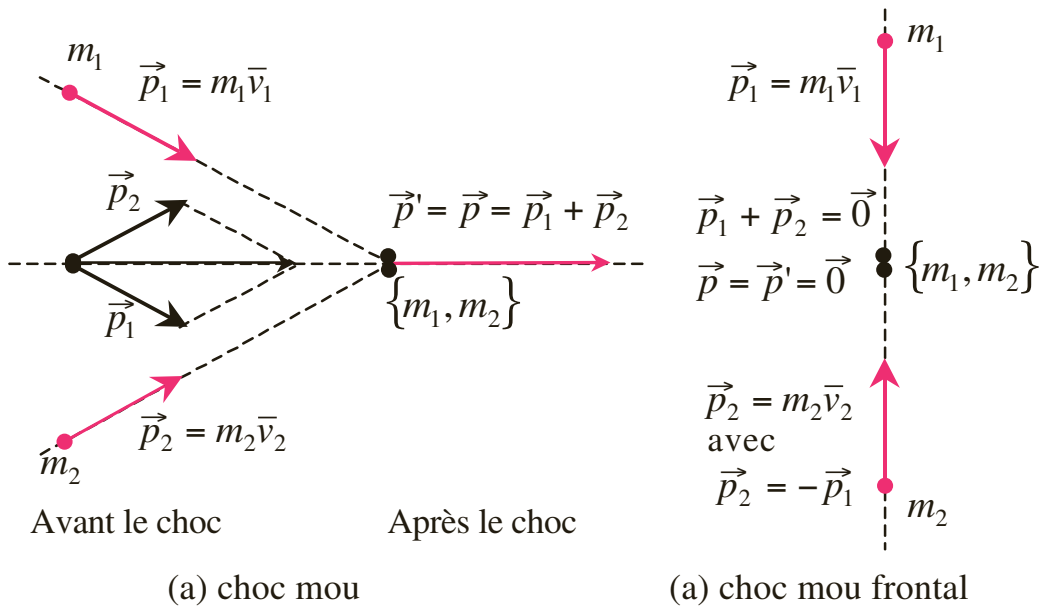


Figure 3.12 Exemples de chocs mous : la conservation du vecteur quantité de mouvement permet de connaître la vitesse que prennent les deux particules liées (a). Dans le cas du choc mou frontal (b) il peut y avoir immobilisation des deux particules après le choc si les quantités de mouvement sont égales et opposées avant le choc.

- Le cas $\varepsilon = 0$ correspondrait au cas où l'énergie cinétique après le choc serait nulle c'est-à-dire où les deux particules se retrouvent immobiles au lieu du choc. Cela n'est possible que si le vecteur quantité de mouvement totale est nul avant le choc. C'est le cas du choc mou frontal (voir *figure 3.12 (b)*) entre deux particules venant en sens inverse avec la même valeur de quantité de mouvement (choc entre deux véhicules identiques, roulant à la même vitesse en sens inverse l'un vers l'autre).

c) Détermination des vitesses après le choc

Connaissant les vitesses avant le choc, on cherche à déterminer les vitesses après le choc. La détermination de ces deux vecteurs vitesse est un problème à 6 inconnues (3 composantes par vecteur). La conservation du vecteur quantité de mouvement donne 3 équations et celle de l'énergie cinétique dans le cas d'un choc élastique en donne une. Le problème comporte donc une double indétermination et ne peut être résolu sans indications supplémentaires.

Ceci n'est pas étonnant car les vitesses après le choc doivent dépendre de ce qui s'est passé pendant le choc ce que les relations de conservation ne font pas apparaître.

En introduisant des conditions sur le choc il sera possible alors de résoudre le problème.

Cas du choc mou

Dans le cas du choc mou, le nombre d'inconnues est ramené à 3 correspondant aux trois coordonnées du vecteur vitesse commun à l'ensemble des deux particules liées après le choc. La conservation de la quantité de mouvement suffit alors pour déterminer la vitesse de l'ensemble. En notant $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'ensemble après le choc, on peut écrire :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (3.65)$$

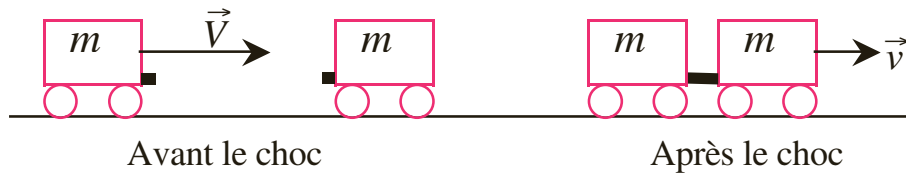
On en déduit alors :

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \quad (3.66)$$

La *figure 3.12 (a)* montre comment déterminer graphiquement la quantité de mouvement totale du système constitué des deux masses m_1 et m_2 . Le mouvement a lieu dans le plan défini par les vecteurs vitesse des particules avant le choc. L'expression de la vitesse après le choc peut s'obtenir algébriquement en exprimant les composantes des vecteurs vitesse avant le choc dans une base cartésienne donnée.


Exemple 1 d'application : Accrochage de deux wagons identiques à la suite d'un choc sur une voie de chemin de fer rectiligne

On considère un wagon de masse m venant heurter à la vitesse V un autre wagon identique immobile sur la voie. Après le choc l'ensemble reste accroché et se déplace à la vitesse v . On néglige tout frottement. L'ensemble des deux wagons constitue alors un système mécaniquement pseudo isolé. On assimile les wagons à des points coïncidant avec leur centre d'inertie.



Tous les déplacements se font suivant la voie rectiligne. On peut alors travailler avec les valeurs algébriques des vitesses.

Avant le choc : $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \Rightarrow p_1 = mV$ et $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow p_2 = 0$

Après le choc : $\vec{p}' = (2m) \vec{v} \Rightarrow p' = 2mv$

Conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}' \Rightarrow mV = 2mv \Rightarrow v = \frac{V}{2}$$

Expression de l'énergie cinétique avant le choc : $E_{Ci} = \frac{1}{2}mV^2$

Expression de l'énergie cinétique après le choc : $E_{Cf} = \frac{1}{2}(2m)v^2$

En remplaçant v par son expression en fonction de V , on a :

$$E_{Cf} = \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{V}{2}\right)^2 \Rightarrow E_{Cf} = \frac{1}{4}mV^2 = \frac{1}{2}E_{Ci}$$

On constate bien que l'énergie cinétique a variée. Cette énergie a diminuée. La variation d'énergie cinétique a pour expression :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = -\frac{1}{4}mV^2$$

Le rapport des énergies cinétiques donne : $\varepsilon = \frac{E_{Cf}}{E_{Ci}} = \frac{1}{2} = 0,5$

Cette variation d'énergie correspond au travail des forces de contact au moment de l'accrochage.


Exemple 2 : Cas particulier du choc frontal. Cette fois on considère que les deux wagons se dirigent l'un vers l'autre avec la même vitesse (cas de la figure 3.12 (b)).

Avant le choc :

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \Rightarrow p_1 = mV \text{ et } \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = -\vec{p}_1 \Rightarrow p_2 = -mV$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$$

Après le choc :

$$\vec{p}' = (2m)\vec{v} \Rightarrow p' = 2mv$$

Conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\vec{p} = \vec{p}' = \vec{0} \Rightarrow v = 0$$

L'ensemble reste immobile. L'énergie cinétique finale est nulle : le coefficient ε vaut zéro.



Exemple 3 : Cas de l'explosion : une masse m immobile dans le référentiel galiléen d'étude éclate en deux morceaux de masses m_1 et m_2 .

On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{p} = \vec{0} = \vec{p}' &\Rightarrow \vec{p}' = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = \vec{0} \\ m_1 \vec{v}'_1 &= -m_2 \vec{v}'_2\end{aligned}$$

Chaque morceau part avec une quantité de mouvement égale et opposée. Si les masses sont égales, les vitesses seront égales. Dans le cas où l'une des masses est très importante par rapport à l'autre, la plus légère aura une vitesse très grande par rapport à la plus lourde. C'est le cas d'une arme à feu (masse importante) qui recule lorsque le projectile (masse faible) est tiré. Évidemment, la vitesse de recul est bien moins importante que la vitesse du projectile.

Choc élastique entre deux particules identiques (déviation)

On considère maintenant le cas d'un choc élastique entre deux particules identiques de masse $m_1 = m = m_2$

Avant le choc :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{p} = m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$E_{Ci} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2)$$

Après le choc :

$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow \vec{p}' = m(\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2)$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{m}{2}(v_1'^2 + v_2'^2)$$

► Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \quad (3.67)$$

► Conservation de l'énergie cinétique :

$$E_{Ci} = E_{Cf} \Rightarrow (v_1^2 + v_2^2) = (v_1'^2 + v_2'^2) \quad (3.68)$$

Considérons le cas particulier où la particule m_2 est fixe avant le choc : $\vec{v}_2 = \vec{0}$. Dans ces conditions les équations (3.67) et (3.68) deviennent :

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \quad (3.69)$$

$$E_{Ci} = E_{Cf} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (3.70)$$

En prenant la norme au carré de la relation (3.69) on a :

$$\vec{v}_1^2 = \|\vec{v}_1\|^2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' \quad (3.71)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$$

En comparant le résultat obtenu avec la relation (3.70) on aboutit à :

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0 \quad (3.72)$$

La direction des vitesses après le choc sont perpendiculaires. Ainsi, si on connaît une direction prise par une particule, alors on en déduit la direction prise par l'autre (voir *figure 3.13*).

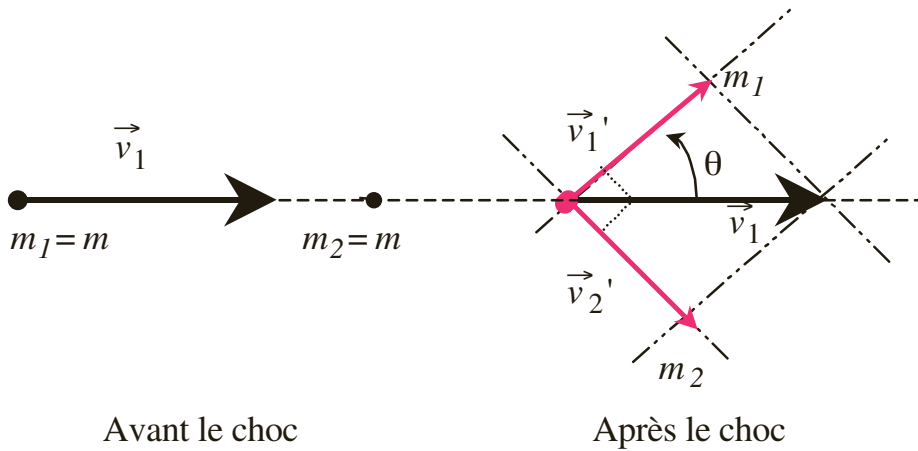


Figure 3.13 Choc élastique entre deux particules identiques (même masse m) l'une étant immobile avant le choc. La direction que prend chaque particule après le choc est perpendiculaire. La projection de la vitesse de la particule m_1 avant le choc sur ces deux directions donnent la valeur des vitesses des particules après le choc.

D'après la relation (3.69), la projection du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ sur les deux directions des vecteurs vitesse $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ permet d'obtenir les valeurs des vitesses $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$.

Par exemple, si θ est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{v}'_1$ avec la vitesse $\vec{v}_1$, alors $\vec{v}'_2$ fait un angle $\theta - \frac{\pi}{2}$ avec $\vec{v}_1$ et on a :

$$v'_1 = v_1 \cos \theta \quad \text{et} \quad v'_2 = v_1 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = v_1 \sin \theta$$

Choc frontal élastique entre deux particules

Il s'agit du cas simple où les trajectoires des différentes particules avant et après le choc ont toutes la même direction. C'est l'exemple des deux wagons sur une voie de chemin de fer rectiligne qui s'entrechoquent sur leurs butoirs sans s'accrocher.

Les vecteurs vitesses ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$) sont tous colinéaires. Le nombre d'inconnues est réduit à deux. Soit un vecteur unitaire $\vec{u}_x$ choisi sur la direction commune, les vecteurs s'écriront $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$, $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$, $\vec{v}'_1 = v'_1 \vec{u}_x$ et $\vec{v}'_2 = v'_2 \vec{u}_x$. Les grandeurs v_1, v_2, v'_1 et v'_2 représentent les mesures algébriques des vitesses et non les normes. Ceci permet de décrire toutes les situations possibles sans avoir à refaire les calculs à chaque fois.

La projection de la relation vectorielle de la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (3.73)$$

La conservation de l'énergie (relation (3.64) donne :

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 \quad (3.74)$$

Une méthode classique de résolution consiste à écrire ce système d'équation sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v_2 - v'_2) \\ m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v_2^2 - v'^2_2) \end{cases} \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \\ m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \end{cases} \quad (3.76)$$

En divisant membre à membre la première équation par la seconde on obtient la relation simple suivante :

$$(v_1 + v'_1) = (v'_2 + v_2) \quad (3.77)$$

Le système d'équation devient :

$$\begin{cases} (v_1 - v_1') = \frac{m_2}{m_1}(v_2' - v_2) \\ (v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \end{cases} \quad (3.78)$$

La somme de ces deux équations donne :

$$2v_1 = \frac{m_2}{m_1}(v_2' - v_2) + (v_2' + v_2) \quad (3.79)$$

$$2v_1 = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)v_2' + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2 \quad (3.80)$$

$$v_2' = \frac{2v_1 - \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \quad (3.81)$$

$$v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_2 + m_1} \quad (3.82)$$

De l'équation (3.77) on en déduit l'expression de la vitesse algébrique v_1' :

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \Rightarrow v_1' = v_2' + v_2 - v_1 \quad (3.83)$$

$$v_1' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_2 + m_1} + v_2 - v_1$$

$$v_1' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_2 + m_1} + \frac{(m_2 + m_1)(v_2 - v_1)}{m_2 + m_1}$$

$$v_1' = \frac{[2m_1 - (m_1 + m_2)]v_1 + [(m_2 - m_1) + (m_2 + m_1)]v_2}{m_2 + m_1}$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_2 + m_1} \quad (3.84)$$



Exemple 1 : cas particulier où les deux particules sont identiques ($m_1 = m_2 = m$) .

Les relations (3.82) et (3.83) deviennent :

$$v_2' = \frac{2mv_1 + (m - m)v_2}{m + m} = v_1 \quad (3.85)$$

$$v_1' = \frac{(m - m)v_1 + 2mv_2}{m + m} = v_2 \quad (3.86)$$

On constate alors que les particules échangent leur vitesse. Ainsi, si la particule m_2 est immobile avant le choc, alors la particule m_1 s'arrête après le choc tandis que la particule m_2 est éjectée avec la vitesse qu'avait m_1 .



Exemple 2 : cas particulier où l'une des particules a une masse très grande devant l'autre et est immobile. :

Soit $m_2 \gg m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \ll 1$ et ($v_2 = 0$). La relation (3.84) devient :

$$v_1' = \frac{m_2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) v_1}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \approx -v_1 \quad (3.87)$$

La relation (3.82) donne :

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \approx 2 \frac{m_1}{m_2} v_1 \approx 0 \quad (3.88)$$

La particule très massive (correspondant à la cible) n'acquiert pratiquement pas de vitesse alors que la particule très légère (le projectile) rebondit et retrouve la même vitesse qu'à l'aller. C'est le cas d'une balle de mousse envoyée contre un mur.



POINTS CLEFS

- Travail élémentaire d'une force pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ de son point d'application :

$$\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

- Travail d'une force dont le point d'application se déplace d'un point A à un point B :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} \quad (3.3)$$

- Puissance instantanée d'une force :

$$P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.18)$$

- Énergie cinétique d'un point matériel de masse m , vitesse v (par rapport à un référentiel d'étude)

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.26)$$

► Théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre une position A et une position B , est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \quad (3.27)$$

► Force conservative et variation d'énergie potentielle

Le travail $W_{AB}(\vec{F}_{ext}^C)$ d'une force conservative $\vec{F}_{ext}^C$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (état A) et final (B). Il existe alors une fonction appelée énergie potentielle dont la variation entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points.

$$W_{AB}(\vec{F}_{ext}^C) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \quad (3.28)$$

► L'énergie potentielle se définit à une constante près. Celle-ci est déterminée par le choix de l'origine des énergies potentielles.

► Définition intégrale de l'énergie potentielle :

$$\int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} = E_p(A) - E_p(B) \quad (3.30)$$

► Définition différentielle de l'énergie potentielle :

$$\delta W(\vec{F}_{ext}^C) = \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} = -dE_p \quad (3.31)$$

► Définition locale de l'énergie potentielle :

$$\vec{F}_{ext}^C = -\vec{\text{grad}} E_p \quad (3.32)$$

$$\vec{F}_{ext}^C = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3.33)$$

► Énergie potentielle de pesanteur :

$$\begin{cases} E_{pp}(z) = mgz \\ \text{avec } E_{pp}(0) = 0 \\ \text{axe Oz orienté vers le haut} \end{cases} \quad (3.38)$$

► Énergie potentielle élastique :

$$E_{PE}(\Delta l) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (3.46)$$

$$\text{allongement } \Delta l = l - l_o$$

► Énergie mécanique : $E = E_c + E_p$

- Théorème de l'énergie mécanique :
La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E = E(B) - E(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \quad (3.59)$$

- Système conservatif : l'énergie mécanique est constante
► Position d'équilibre et stabilité :

Équilibre stable pour $x = x_o$, alors $E_p(x)$ est minimale pour $x = x_o$

$$\frac{dE_p}{dx}(x_o) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_o) > 0$$

- Choc entre particules matérielles formant un système isolé ou pseudo isolé :
- Conservation du vecteur quantité de mouvement totale
 - Choc élastique : conservation de l'énergie cinétique
 - Choc inélastique : l'énergie cinétique ne se conserve pas

EXERCICES

3.1 Police scientifique

Le conducteur d'une voiture de masse $m = 1,6 \text{ t}$ freine en urgence afin d'éviter la collision avec un autobus à l'arrêt. Le choc ne peut être évité mais heureusement il ne fait aucune victime. Les marques sur la route indiquent que la voiture a eu besoin de 25 m pour s'arrêter. Le conducteur affirme qu'il roulait à une vitesse inférieure à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ mais un témoin de l'accident affirme le contraire.

Des tests effectués par des experts scientifiques ont montré que le coefficient de frottement entre les pneus de la voiture et la route est de $\mu_C = 0,6$.

Calculer la vitesse de la voiture et déterminer qui du conducteur ou du témoin a raison ?

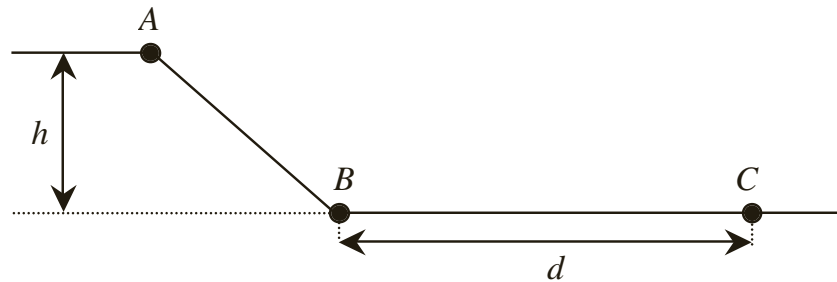
Réponse : $v = 61,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

3.2 Esquimau

Un esquimau aimerait atteindre un point C situé à $D = 1,9 \text{ km}$ du point B . Pour cela il s'élance du point A , situé à une hauteur $h = 200 \text{ m}$ au-dessus de B , sans vitesse initiale.

La masse totale du traîneau et de l'esquimau est de 200 kg et le traîneau glisse sans frottement sur la pente AB . Sachant qu'à partir de B des frottements de glissement de coefficient $\mu_C = 0,1$ interviennent,

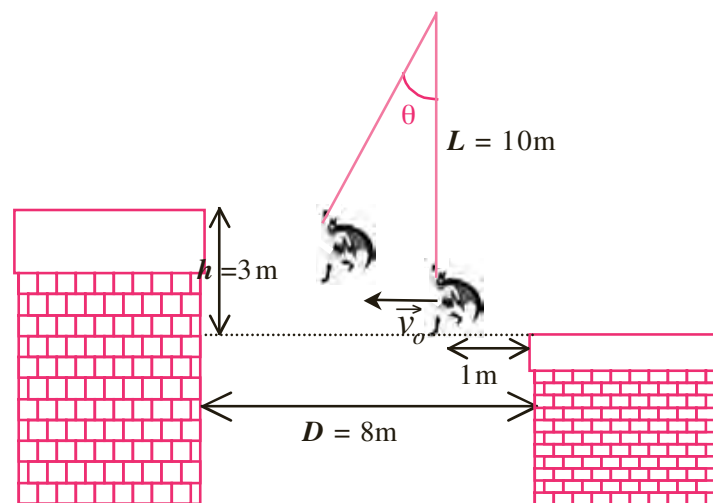
calculer la distance d'arrêt d . L'esquimau va-t-il atteindre son objectif ?



Réponse : $d = 2000 \text{ m}$

3.3 Batman

Batman, poursuivi par un ennemi, court sur le toit d'un immeuble. Pour passer sur le toit de l'immeuble voisin situé à une hauteur $h = 3 \text{ m}$ au-dessus de lui, il doit franchir un vide large de $D = 8 \text{ m}$ (voir figure). Pour franchir ce vide, Batman fait un saut de 1 m et se saisit d'un câble vertical ($L = 10 \text{ m}$) accroché à une grue. Au moment où il se saisit du câble la vitesse de Batman est horizontale et vaut $v_o = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



- 1) Faire le bilan des forces appliquées à Batman et en déduire si Batman est un système conservatif ou non.
- 2) Calculer l'énergie mécanique au moment où Batman se saisit du fil (préciser le choix de l'origine des énergies potentielles).
- 3) Donner l'expression générale de l'énergie mécanique de Batman en fonction de l'angle θ que fait le fil avec la verticale.
- 4) Déterminer l'angle maximal θ_{max} que peut atteindre Batman. On prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- 5) Batman va-t-il réussir à passer sur le toit voisin ?

Réponses : 4) $\theta_{max} = 47,6^\circ$; 5) oui

3.4 Batman suite...

Le poursuivant de Batman court à $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il se saisit lui aussi du câble vertical en conservant sa vitesse initiale.

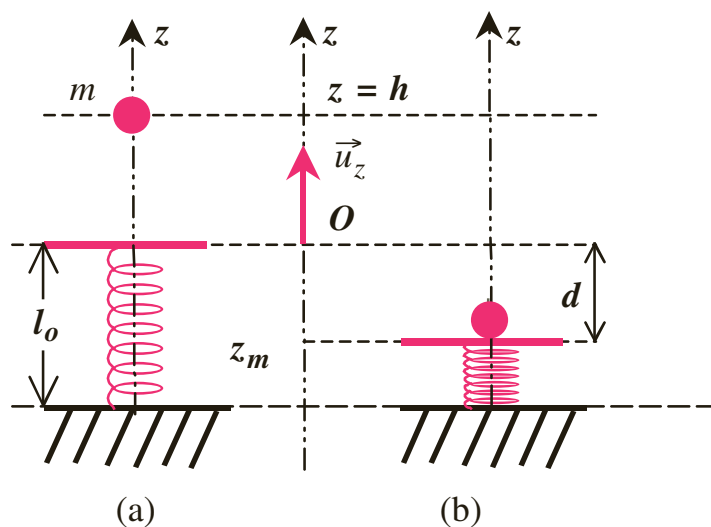
- 1) Sachant que le poursuivant ne peut atteindre le toit voisin et qu'il reste accroché au fil, donnez l'expression générale de son énergie mécanique en fonction de θ .
- 2) Sachant que θ reste faible donner l'équation du mouvement $\theta = f(t)$.
- 3) En déduire l'angle $\theta_{\max}$.

Réponse : 3) $\theta_{\max} = 11,6^\circ$

3.5 Trampoline

Un enfant de masse $m = 40 \text{ kg}$ saute depuis une hauteur $h = 1 \text{ m}$ sur un trampoline assimilé à un ressort de constante de raideur $k = 4\,000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ (voir figure). On repère les altitudes sur un axe vertical orienté vers le haut, l'origine O est prise au niveau du trampoline.

On prendra $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



(a) trampoline au repos, la masse m est à l'altitude h avec une vitesse nulle.

(b) Trampoline comprimé au maximum.

- 1) Préciser quelle est la vitesse de l'enfant lorsque le trampoline est comprimé au maximum ($z = z_m < 0$) ?
- 2) En utilisant les expressions de l'énergie mécanique de l'enfant à différents instants (correspondants à la figure), donner la compression maximale $d = (-z_m)$ en fonction de m , g , h et k . Calculer d .
- 3) Si l'enfant ne pousse pas sur ses jambes à quelle hauteur h' du trampoline va-t-il remonté ?
- 4) L'enfant exerce en z_m une poussée verticale qui lui permet de monter à une hauteur $h'' = 2 \text{ m}$. Sachant qu'une cacahuète fournit

10 calories d'énergie (1 calorie = 4,18 J), combien de cacahuètes l'enfant devra-t-il manger pour récupérer toute l'énergie dépensée lors de la poussée ?

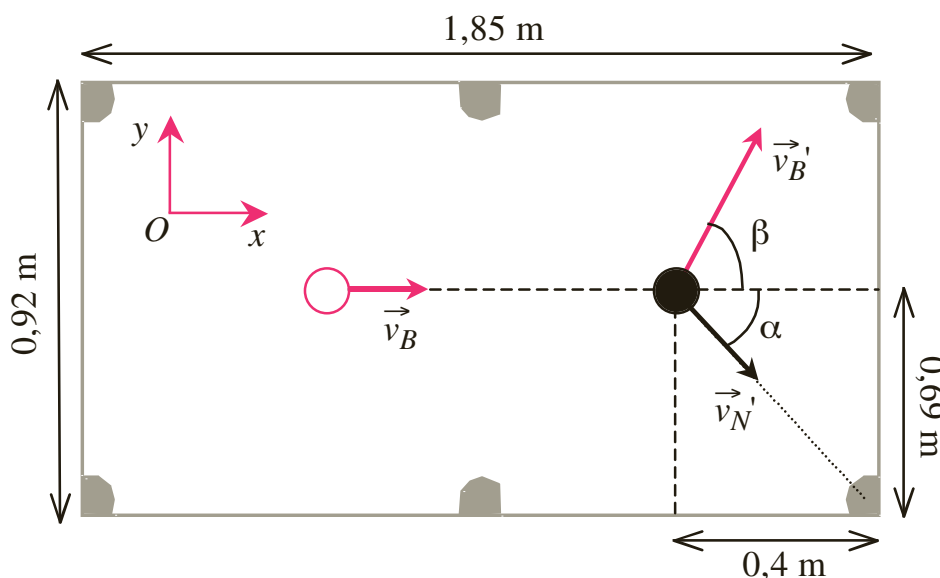
Réponses : 1) $v = 0$; 3) $h' = 1$ m ; 4) 10 cacahuètes

3.6 Partie de billard

Séverine et Antoine jouent une partie de Pool anglais. Ce jeu est une variante du billard qui requiert 16 billes de masse $m = 0,5$ kg : une blanche dite bille de choc, une noire dite bille de but, 7 billes rouges et 7 billes jaunes. Le but du jeu est de rentrer toutes les billes de sa couleur, et ensuite la noire, directement ou indirectement et dans n'importe quel trou. Certaines fautes entraînent la perte définitive de la partie :

- Rentrer la bille noire avant d'avoir rentré ses 7 billes de couleurs.
- Rentrer la bille blanche en même temps que la bille noire.

À la fin de la partie, il ne reste plus que la boule blanche et la boule noire sur le tapis (figure ci-dessous) et c'est à Antoine de jouer.



Antoine veut mettre la bille noire dans le trou en bas à droite. Pour cela il donne une vitesse $v_B = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à la bille blanche dans la direction Ox vers la bille noire. On suppose que le choc entre les deux billes est élastique. On note v_B' et v_N' les vecteurs vitesses respectivement de la boule blanche et de la noire.

- Déterminer la valeur de l'angle α que doit faire v_N' avec la direction Ox pour que la bille noire entre dans le trou.
- Calculer les vitesses v_B' et v_N' .
- Calculer l'angle β , correspondant à la direction, par rapport à l'axe Ox , de la boule blanche après le choc.

d) Qui de Séverine ou d'Antoine a gagné la partie ?

Réponses : a) $\alpha = 60^\circ$; b) $v'_N = 0,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v'_B = 0,87 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
c) $\beta = 30^\circ$; d) Séverine

SOLUTIONS

3.1 Police scientifique

Système : voiture

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces : Le poids $\vec{P}$, la réaction normale au sol $\vec{R}_n$ et la force de frottement $\vec{f}$ permettant l'arrêt (force opposée au déplacement).

Le travail de $\vec{f}$ sur une distance d , d'un point A (début de freinage) à un point B (arrêt) est :

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -f dl = -f \int_A^B dl = -fd$$

Le poids et la réaction normale sont des forces perpendiculaires au sol et donc ne travaillent pas pendant la période de freinage :

$$W_{AB}(\vec{P}) = W_{AB}(\vec{R}_n) = 0$$

La variation d'énergie cinétique entre le point A (vitesse v) et le point B (arrêt $v = 0$) est :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, cette variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux de toutes les forces agissant sur le système. On a donc :

$$\Delta E_c = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) = 0 + 0 + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\text{Soit : } \Delta E_c = -\frac{1}{2}mv^2 = -fd \Rightarrow 2fd = mv^2$$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m\vec{a}$$

Le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}_n$ se compensent (pas de mouvement donc d'accélération suivant la verticale) : $\vec{P} + \vec{R}_n = 0 \Rightarrow R_n = mg$

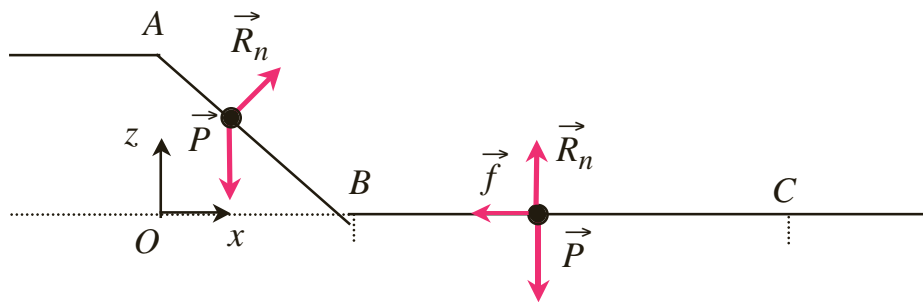
Au cours du mouvement on a : $f = \mu_C R_n = \mu_C mg$:

$$\text{Finalement : } 2fd = mv^2 \Rightarrow 2d\mu_C mg = mv^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } v = \sqrt{2\mu_C gd} = \sqrt{2 \cdot 0,6 \cdot 9,81 \cdot 25} = 17,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ = 61,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

L'automobiliste roulait bien à une vitesse supérieure à la vitesse réglementaire.

3.2 Esquimau



► Entre A et B :

Système : traîneau+esquimau

Référentiel : terrestre et galiléen

Forces appliquées : le poids $\vec{P}$ et la réaction normale du sol $\vec{R}_n$

Ces forces sont toutes les deux conservatives, il n'y a pas de frottement, le système est donc conservatif. L'énergie mécanique de ce système se conserve : $\Delta E = 0 \Rightarrow E_m(A) = E_m(B)$

On a : $E_m = E_c + E_{pp}$ où $E_c = 1/2 mv^2$ est l'énergie cinétique et E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur. Avec un axe vertical orienté vers le haut et en choisissant de prendre l'énergie potentielle nulle à l'altitude 0 on a : $E_{pp} = mgz$

On a : en A, altitude z_A et vitesse $v_A = 0$ et en B, altitude $z_B = 0$ et vitesse v_B . On en déduit :

$$E_m(A) = mgz_A = E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

► Entre B et C :

Système : traîneau+esquimau

Référentiel : terrestre et galiléen

Forces appliquées : le poids $\vec{P}$ et la réaction normale du sol $\vec{R}_n$ et la force de frottement $\vec{f}$.

Cette force de frottement n'est pas conservative. Dans ce cas, la variation d'énergie mécanique totale entre deux positions correspond au travail des forces non conservatives entre ces deux positions c'est-à-dire ici au travail de $\vec{f}$. On a donc :

$$\Delta E_m = E_m(C) - E_m(B) = W_{BC}(\vec{f}) = \int_B^C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_B^C -f dl = -f \int_B^C dl = -fd$$

L'énergie mécanique totale en C est nulle car l'altitude et la vitesse sont nulles ($z_C = 0$ et $v_C = 0$). On a vu précédemment que l'énergie mécanique totale en B correspond à l'énergie mécanique totale en A . On en déduit :

$$E_m(C) - E_m(B) = 0 - E_m(B) = -E_m(A) = -mgz_A = -fd$$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m\vec{a}$

La projection suivant Oz (pas de mouvement $\ddot{z} = 0$) donne :

$$mg - R_n = m\ddot{z} = 0 \Rightarrow R_n = mg$$

Au cours du mouvement on a la relation : $f = \mu_C R_n$ $f = \mu_C R_n$.

Finalement on obtient :

$$mgz_A = fd = \mu_C R_n d = \mu_C mgd \Rightarrow d = \frac{z_A}{\mu_C} = \frac{200}{0,1} = 2\,000 \text{ m.}$$

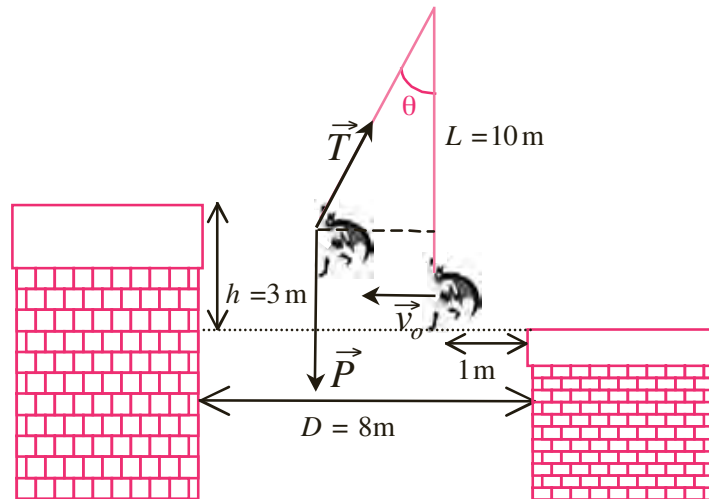
L'esquimau peut atteindre le point C .

3.3 Batman

1) *Système mécanique* : Batman

Référentiel : terrestre galiléen

Forces appliquées : Poids $\vec{P}$ force conservative et la tension $\vec{T}$ du fil qui ne travaille pas (la force est toujours perpendiculaire au déplacement). Il n'y a pas de frottement. Le système est donc conservatif.



2) En choisissant l'énergie potentielle de pesanteur nulle lorsque Batman se saisit du fil, l'énergie mécanique totale est :

$$E_m = E_c + E_p = E_c = \frac{1}{2}mv_o^2$$

3) À tout instant t , on a : $E_m = E_c + E_p$

Expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Batman décrit un arc de cercle de rayon L . La vitesse v s'exprime simplement en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par : $v = L\dot{\theta}$. On a donc :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

Expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

Avec un axe vertical ascendant on a : $E_p = mgz$ avec z l'altitude à l'instant t , par rapport à la position initiale de Batman.

En projetant le fil de longueur L à la date t sur la verticale (voir figure) l'altitude z a pour expression :

$$z = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

Finalement on obtient l'expression de l'énergie mécanique de Batman en fonction de θ :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

4) La conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

L'angle sera maximal lorsque la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annulera. On a

$$\text{alors : } \frac{1}{2}mv_o^2 = mgL(1 - \cos\theta_{\max}) \Rightarrow \cos\theta_{\max} = 1 - \frac{v_o^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{64}{2 \cdot 10 \cdot 9,81} = 1 - 0,326 = 0,6738 \Rightarrow \theta_{\max} = 47,64^\circ$$

5) Pour répondre à cette question il faut déterminer si Batman peut aller au-dessus de $h = 3$ m et s'il peut franchir la distance $D - 1$ m = 7 m.

$$\cos\theta_{\max} = \frac{L-h}{L} : \text{ on en déduit } h = L(1 - \cos\theta_{\max}) = 3,26 \text{ m} >$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$\text{On a aussi } \sin\theta_{\max} = \frac{d}{L}, \text{ on en déduit } d = 7,38 \text{ m} > D - 1 = 7 \text{ m}$$

Donc Batman va atteindre le toit voisin.

3.4 Batman suite...

Système : le poursuivant

Référentiel : terrestre galiléen

Forces appliquées : Poids $\vec{P}$ force conservative et la tension $\vec{T}$ du fil qui ne travaille pas (la force est toujours perpendiculaire au déplacement). Il n'y a pas de frottement. Le système est donc conservatif.

1) Par définition on a : $E_m = E_c + E_p$

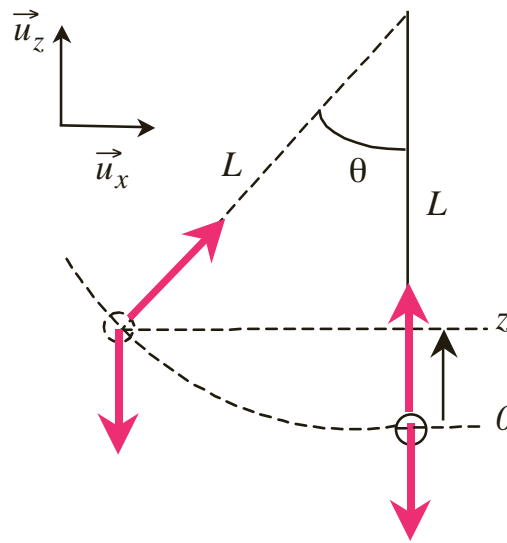
$$\text{Expression de l'énergie cinétique : } E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Le poursuivant décrit un arc de cercle de rayon L . La vitesse v s'exprime simplement en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par : $v = L\dot{\theta}$. On a :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

Expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

Avec un axe vertical ascendant on a : $E_p = mgz$ avec z l'altitude à l'instant t , par rapport à la position du point initialement à la verticale.



En projetant le fil de longueur L à la date t sur la verticale (voir figure) l'altitude z a pour expression :

$$z = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

Finalement l'expression de l'énergie mécanique en fonction de θ est :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

2) Le système étant conservatif, l'énergie mécanique totale se conserve :

$$E_m = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \text{ soit :}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}L\dot{\theta}^2 + g(1 - \cos\theta) \right] mL = mL \left[\frac{2}{2}L\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta \right] = 0$$

$$\text{D'où, puisque } \dot{\theta} \neq 0 : \dot{\theta}(L\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Pour θ suffisamment petit on a $\sin\theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

On obtient l'équation différentielle du second ordre sans second membre caractéristique de l'oscillateur harmonique.

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_o t + \varphi)$$

où θ_m et φ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

L'expression de la vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = -\theta_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$$

Calcul des constantes θ_m et φ :

Pour $t = 0$ on a $\theta(0) = 0$ et $v_o = L\dot{\theta}(0) \Rightarrow \dot{\theta}(0) = \frac{v_o}{L}$

$$\theta(0) = \theta_m \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\theta}(0) = -\theta_m \omega_o \sin \varphi = \frac{v_o}{L} \Rightarrow \theta_m = -\frac{v_o}{\omega_o L \sin \varphi}$$

On choisit de prendre θ_m positif soit alors : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_m = \frac{v_o}{\omega_o L}$

Ainsi on obtient l'équation du mouvement :

$$\theta = \frac{v_o}{\omega_o L} \cos\left(\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_o}{\omega_o L} \sin \omega_o t$$

La période des oscillations est donnée par la relation :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{10}{9,81}} = 6,34 \text{ s}$$

3) D'après l'équation du mouvement on voit que θ est maximal lorsque le sinus vaut 1 c'est-à-dire :

$$\theta_{\max} = \theta_m = \frac{v_o}{\omega_o L} = \frac{v_o}{L} \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{v_o}{\sqrt{gL}} = \frac{2}{\sqrt{98,1}} = 0,2 \text{ rad} \approx 11,6^\circ$$

Remarque : $\sin \theta_m = 0,2006 \approx \theta_m$ ce qui justifie l'approximation qui a été faite.

3.5 Trampoline

1) Lorsque le trampoline est comprimé au maximum ($z = z_m < 0$) l'enfant a une vitesse nulle.

2) Système : l'enfant

Référentiel terrestre galiléen

► Initialement (début du saut) :

Forces appliquées : uniquement le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (force conservative)

L'enfant est situé à l'altitude h par rapport au trampoline au repos et sa vitesse est nulle. Avec l'axe Oz vertical vers le haut et en choisissant l'origine O au niveau du trampoline au repos l'énergie potentielle a pour expression : $E_{pp} = mgh$.

L'énergie mécanique totale E_{mi} a pour expression :

$$E_{mi} = E_c + E_p = E_{pp} = mgz = mgh$$

► Lorsque le trampoline est comprimé au maximum :

Forces appliquées : Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du ressort (forces conservatives qui dérivent des énergies potentielles respectivement E_{pp} de pesanteur et E_{pe} élastique).

L'enfant est situé maintenant à l'altitude $z_m < 0$ (*le trampoline est comprimé*) par rapport au trampoline au repos et sa vitesse est nulle ($E_c = 0$).

L'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz_m$.

L'énergie potentielle élastique s'écrit : $E_{pe} = \frac{1}{2}kz_m^2$.

L'énergie mécanique totale E_{mf} a donc pour expression :

$$E_{mf} = E_c + E_p = E_{pp} + E_{pe} = mgz_m + \frac{1}{2}kz_m^2$$

Le système est conservatif donc l'énergie se conserve : $E_{mi} = E_{mf}$.

Avec $z_m = -d$ ($d > 0$), on obtient l'équation : $mgh = -mgd + \frac{1}{2}kd^2$

$d^2 - \frac{2mg}{k}d - \frac{2mgh}{k} = 0 \Rightarrow d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$ (la solution doit être positif).

A.N. : On a $mg = 40 \cdot 10 = 400$ N, $k = 4\,000$ N/m et $h = 1$ m.

$$\begin{aligned} d &= \frac{400}{4\,000} + \sqrt{\left(\frac{400}{4\,000}\right)^2 + \frac{2 \cdot 400}{4\,000}} = \frac{1}{10} + \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{2}{10}} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{21}}{10} = 0,56 \text{ m} \end{aligned}$$

3) On a toujours conservation de l'énergie mécanique. Pour l'altitude maximale h' la vitesse de l'enfant est nulle soit :

$$mgh' = mgz_m + \frac{1}{2}kz_m^2 = mgh \Rightarrow h = h' = 1 \text{ m.}$$

4) Il faut ajouter l'énergie E fournie par l'enfant ce qui donne comme nouvelle énergie mécanique E_m :

$$E_m = E_{mi} + E = E_{mf} + E \Rightarrow E_m = mgz_m + \frac{1}{2}kz_m^2 + E = mgh + E$$

Quand l'enfant est à l'altitude h'' (sa vitesse est nulle) on a : $E_m' = mgh''$.

Il y a conservation de l'énergie c'est-à-dire $E_m = E_m'$ soit :

$$mgh'' = mgz_m + \frac{1}{2}kz_m^2 + E = mgh + E \Rightarrow mgh'' - mgh = E$$

$$A.N. : E = mg(h'' - h) = 400 \text{ J}$$

Le nombre de cacahuètes nécessaires pour apporter cette énergie est :

1 cacahuète apporte $10 \cdot 4,18 = 41,8 \text{ J}$ donc :

$$n = E/41,8 \approx 9,6 \text{ soit } 10 \text{ cacahuètes.}$$

3.6 Partie de billard

a) On a immédiatement $\tan \alpha = \frac{0,69}{0,4}$ c'est-à-dire $\alpha \approx 60^\circ$

b) Le système $\{m_g, m_N\}$ étant pseudo isolé, on a d'après le principe d'inertie la conservation du vecteur quantité de mouvement totale du système.

On a avant le choc : $\vec{p} = m\vec{v}_B = mv_B\vec{u}_x$.

Après le choc : $\vec{p} = m\vec{v}_B' + m\vec{v}_N' = m[\vec{v}_B' + \vec{v}_N']$

Avec : $\vec{v}_B' = (\vec{v}_B'\cos\beta)\vec{u}_x - (\vec{v}_B'\sin\beta)\vec{u}_y$ et

$\vec{v}_N' = (\vec{v}_N'\cos\alpha)\vec{u}_x + (\vec{v}_N'\sin\alpha)\vec{u}_y$

$$\vec{p} = m[\vec{v}_B'\cos\beta + \vec{v}_N'\cos\alpha]\vec{u}_x + m[\vec{v}_N'\sin\alpha - \vec{v}_B'\sin\beta]\vec{u}_y$$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy on a :

$$\begin{cases} v_B = \vec{v}_B'\cos\beta + \vec{v}_N'\cos\alpha & \text{sur } \vec{u}_x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 = \vec{v}_N'\sin\alpha - \vec{v}_B'\sin\beta & \text{sur } \vec{u}_y \end{cases} \quad (2)$$

De plus le choc étant élastique, il y a conservation de l'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}mv_N'^2 \Rightarrow v_B^2 = v_B'^2 + v_N'^2 \quad (3)$$

On a donc un système de trois équations à trois inconnues.

En passant les termes en v_N' à gauche et en mettant les équations (1) et (2) au carré on obtient :

$$\begin{cases} (v_B - v_N' \cos \alpha)^2 = (v_B' \cos \beta)^2 & (1) \\ (v_N' \sin \alpha)^2 = (v_B' \sin \beta)^2 & (2) \end{cases}$$

C'est-à-dire encore :

$$\begin{cases} v_B^2 - 2v_B v_N' \cos \alpha + (v_N' \cos \alpha)^2 = (v_B' \cos \beta)^2 & (1) \\ (v_N' \sin \alpha)^2 = (v_B' \sin \beta)^2 & (2) \end{cases}$$

On additionne (1) et (2) :

$$\begin{aligned} v_B^2 - 2v_B v_N' \cos \alpha + (v_N' \cos \alpha)^2 + (v_N' \sin \alpha)^2 &= (v_B' \cos \beta)^2 + (v_B' \sin \beta)^2 \\ v_B^2 - 2v_B v_N' \cos \alpha + v_N'^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= v_B'^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\ v_B^2 - 2v_B v_N' \cos \alpha + v_N'^2 &= v_B'^2 & (4) \end{aligned}$$

On utilise la relation (3) pour calculer v_B' en fonction de v_N' et v_B et on réintroduit cette expression dans l'équation (4).

On obtient alors :

$$v_B^2 - 2v_B v_N' \cos \alpha + v_N'^2 = v_B'^2 = v_B^2 - v_N'^2 \quad (4)$$

C'est-à-dire :

$$2v_B v_N' \cos \alpha = 2v_N'^2 \Rightarrow v_N' = v_B \cos \alpha$$

En utilisant la relation (3) on peut calculer v_B' :

$$v_B'^2 = v_B^2 - v_N'^2 \Rightarrow v_B' = \sqrt{v_B^2 - v_N'^2}$$

$$A.N. : v_N' = v_B \cos \alpha = 1 \cdot \cos 60^\circ = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B' = \sqrt{1 - 0,5^2} = \sqrt{0,75} = 0,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Pour calculer l'angle β on peut utiliser la relation (1) ou (2) :

$$(2) : 0 = v_N' \sin \alpha - v_B' \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{v_N' \sin \alpha}{v_B'} \approx \frac{0,5 \cdot \sin 60^\circ}{0,87} \approx 0,5$$

$$(1) : v_B = v_B' \cos \beta + v_N' \cos \alpha \Rightarrow \cos \beta = \frac{v_B - v_N' \cos \alpha}{v_B'} \approx 0,86$$

A.N. : on obtient $\beta = 30^\circ$

Remarque : on trouve que $\alpha = \beta = 90^\circ$ ce qui est un résultat plus général.

d) Pour savoir qui a gagné il faut savoir si la bille blanche va elle aussi entrer dans un trou.

On voit sur le schéma que l'angle β_c pour lequel la bille blanche entre dans le trou est égal à :

$$\tan \beta_c = \frac{0,92 - 0,69}{0,4} = 0,575 \Rightarrow \beta_c = 30^\circ$$

Puisque $\beta_c = \beta$, la bille blanche entre dans le trou, il y a donc faute d'Antoine et c'est Séverine qui remporte la partie.

CHAPITRE 4

Oscillateurs mécaniques libres

PLAN

- 4.1 Oscillateur harmonique
- 4.2 Oscillateur amorti
- 4.3 Points clés

OBJECTIFS

- Définir l'oscillateur mécanique
- Présenter les aspects dynamiques et énergétiques de l'oscillateur mécanique
- Apprendre comment les frottements fluides influencent le mouvement de l'oscillateur.

4.1 OSCILLATEUR HARMONIQUE

a) Définitions

Équation horaire

On appelle oscillateur harmonique tout système dont le paramètre ou degré de liberté $x(t)$ qui le caractérise est une fonction sinusoïdale du temps. Cette fonction peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1)$$

Les différents termes intervenant dans cette expression ont déjà été définis dans le chapitre 1 paragraphe 1.5 (Mouvement rectiligne sinusoïdal). Nous les rappelons ci-dessous.

- La grandeur $x(t)$, appelée par définition l'élongation (ou la position) à l'instant t , varie entre les valeurs $-X_m$ et X_m appelée élongation maximale ou amplitude du mouvement.
- La quantité $(\omega t + \varphi)$, homogène à un angle (unité radian, sans dimension), est la phase à l'instant t , l'angle φ correspondant à la phase à l'origine $t = 0$. La grandeur ω est la pulsation du mouvement et s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. L'allure de l'évolution du paramètre x en fonction du temps t d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega = 6,28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, d'amplitude $x_m = 5 \text{ cm}$ est représentée sur la figure 4.1.

La période T des oscillations est le temps mis par l'oscillateur pour revenir à une position identique quelque soit le choix de cette position. C'est aussi le temps mis pour faire une oscillation complète ou un « aller-retour ». Mathématiquement la période T est définie par :

$$\exists T/\forall t \quad x(t+T) = x(t)$$

La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π . On en déduit l'expression de T en fonction de la pulsation (voir § 1.5 (Mouvement rectiligne sinusoïdal)) :

$$[\omega(t+T) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.2)$$

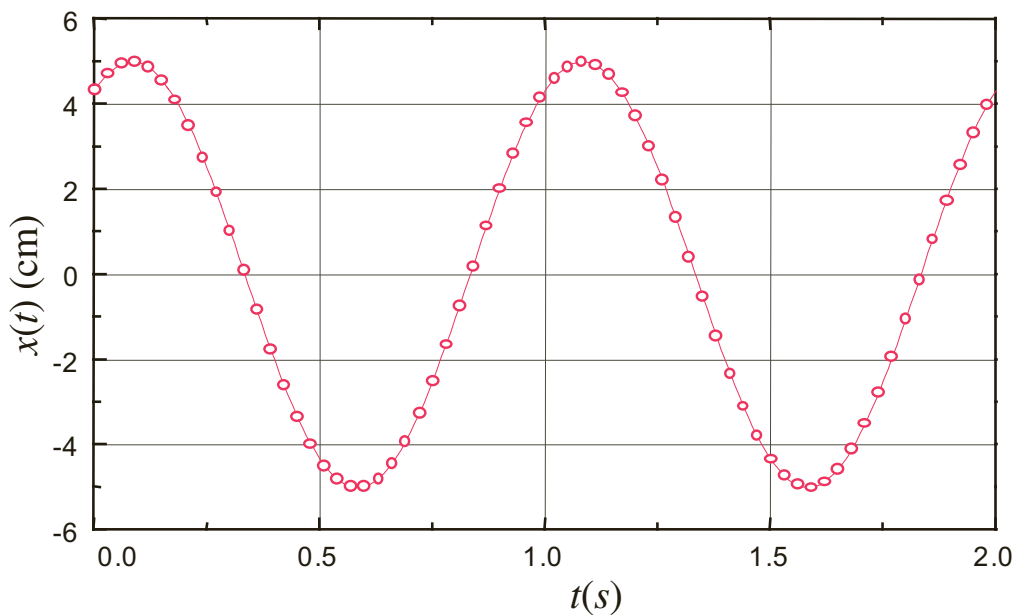


Figure 4.1 Représentation, en fonction du temps, de la position d'un oscillateur harmonique d'amplitude maximale $X_m = 5 \text{ cm}$ et de période $T = 1 \text{ s}$.

La fréquence f , nombre d'oscillations par seconde correspond à l'inverse de la période T : $f = 1/T$. Sur la représentation de la figure 4.1 la période est de $T = 2\pi/\omega = 2\pi/6,28 = 1 \text{ s}$ et la fréquence de $f = 1 \text{ Hz}$.



Il existe d'autres expressions équivalentes pour la fonction $x(t)$. En effet, la fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de $\pi/2$. On peut donc écrire :

$$X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow X_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec : } \phi = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

De même, en utilisant les relations trigonométriques il est possible d'exprimer la fonction $x(t)$ comme une combinaison de fonction sinus et cosinus. On peut écrire :

$$\begin{aligned} X_m \cos(\omega t + \varphi) &\Leftrightarrow X_m [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \\ X_m \cos(\omega t + \varphi) &\Leftrightarrow (X_m \cos \varphi) \cos \omega t + (-X_m \sin \varphi) \sin \omega t \\ X_m \cos(\omega t + \varphi) &\Leftrightarrow A_m \cos \omega t + B_m \sin \omega t \\ A_m &= X_m \cos \varphi \quad \text{et} \quad B_m = -X_m \sin \varphi \end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, le choix de la forme de la fonction dépend des conditions initiales du mouvement de l'oscillateur. On choisit, en général, la forme la plus simple respectant ces conditions.

Équation différentielle

En reprenant les résultats obtenus au chapitre 1 § 1.5 (Mouvement rectiligne sinusoïdal) on a :

► La fonction $x(t)$:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

► La dérivée première de la fonction $x(t)$ (la vitesse) :

$$\dot{x} = -X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

► La dérivée seconde de la fonction $x(t)$ (l'accélération) :

$$\dot{x} = -X_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

On constate que l'accélération peut s'exprimer en fonction de $x(t)$. La relation est : $\ddot{x} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$.

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.3)$$



C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.



Réciproquement : Si l'équation différentielle du mouvement d'un point repéré par une variable x est de la forme $\ddot{x} + Cx = 0$ avec C une constante positive ($C > 0$), alors la solution est celle d'un oscillateur harmonique. En posant $\omega = \sqrt{C}$ on a : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où X_m et φ sont deux constantes dépendant des conditions du problème qui se traduisent en général par les conditions initiales (valeurs à l'instant $t = 0$ de $x(t) = x(0) = x_o$ et de $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_o$).

b) Exemples d'oscillateurs harmoniques

Le pendule élastique horizontal

C'est le cas d'une masse m accrochée à l'extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction Ox horizontale (voir *figure 4.4* : le support n'est pas représenté). Le ressort de raideur k est à spires non jointives pour pouvoir travailler aussi bien en étirement qu'en compression.

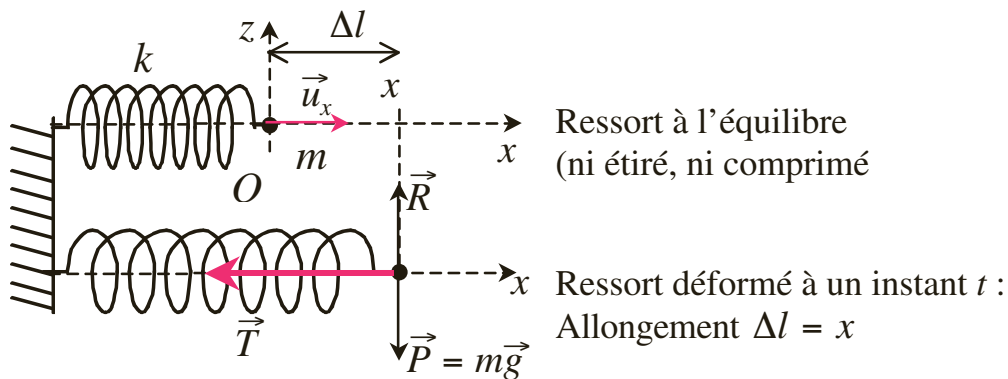


Figure 4.4 Pendule élastique horizontal : la masse m , accrochée à l'extrémité libre d'un ressort de raideur k , se déplace suivant un axe horizontal.

L'origine O choisie correspond à la position de m lorsque le ressort est ni étiré, ni comprimé (position d'équilibre). Dans ce cas, l'abscisse x de la masse m à un instant t quelconque correspondra exactement à l'allongement du ressort. Il suffit d'étirer le ressort et de lâcher la masse pour que le système se mette à osciller. Étudions ce mouvement.

- Système étudié : la masse m
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre (lié au support du ressort) et qui peut être considéré galiléen. La masse est repérée par son abscisse x sur un axe horizontal Ox (voir *figure 4.4*).
- Bilan des forces appliquées : la tension $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$ du ressort, le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du support de la masse. Les frottements étant négligés cette réaction est perpendiculaire au support et s'oppose au poids (voir *figure 4.4* : le support n'est pas représenté).
- Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$
- Projection suivant la verticale (axe Oz) : $R - P = m\ddot{z} = 0$ (pas de mouvement vertical, la masse reste sur l'horizontale).

➤ Projection suivant l'horizontale (axe Ox) : $-kx = m\ddot{x}$

➤ Équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Le rapport k/m étant positif, on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de la forme $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$ en posant :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.4)$$

La pulsation ω_o , qui ne dépend que de la masse m et de la raideur k du ressort, est appelée la pulsation propre de l'oscillateur. La solution est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (4.5)$$

La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre T_o des oscillations donnée par la relation suivante :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.6)$$

Les constantes, amplitude maximale X_m et phase à l'origine φ , dépendent des conditions du problème. On indique souvent les conditions initiales qui sont en général : à l'instant $t=0$, on allonge le ressort d'une quantité X_o et on lâche sans donner de vitesse. Cela se traduit mathématiquement par :

$$x(t=0) = X_o \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = v(0) = 0 \quad (4.7)$$

En dérivant la fonction $x(t)$ on obtient l'expression de la vitesse (voir chapitre 1, paragraphe 1.5.b mouvement rectiligne sinusoïdal) :

$$\dot{x}(t) = -X_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) \quad (4.8)$$

Les conditions (4.7) conduisent au système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} x(0) = X_o = X_m \cos \varphi \\ v(0) = \dot{x}(0) = 0 = -X_m \omega_o \sin \varphi \end{cases} \quad (4.9a)$$

L'amplitude maximale X_m n'étant pas nulle, de la deuxième équation on tire $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Les solutions possibles sont donc :

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow X_o = X_m \cos \varphi = X_m \\ x(t) &= X_o \cos \omega_o t \end{aligned} \quad (4.9b)$$

ou

$$\begin{aligned}\varphi = \pi &\Rightarrow X_o = X_m \cos \varphi = -X_m \\ x(t) &= -X_m \cos(\omega_o t + \pi)\end{aligned}\quad (4.9c)$$

Les deux solutions sont identiques puisque : $\cos \omega_o t = -\cos(\omega_o t + \pi)$. On conserve la première (4.9b) qui correspond à une amplitude positive et à une expression plus simple de la solution.



Ce résultat montre aussi pour quelle raison, en mécanique, on choisit de donner la solution de l'oscillateur harmonique sous forme d'un cosinus (expression 4.5) et non d'un sinus.

Le pendule élastique vertical

Le plus souvent la masse est suspendue à un ressort et peut donc osciller verticalement. On élimine ainsi les frottements solides possibles avec un support. Dans un premier temps on peut aussi négliger les frottements fluides avec l'air environnant.

Lorsque le système est à l'équilibre, le ressort présente un allongement Δl_e . La masse oscillant autour de cette position d'équilibre, il est plus commode de choisir de repérer la position de la masse par rapport à la position d'équilibre. Dans ces conditions, l'abscisse x ne correspondra pas avec l'allongement du ressort (voir *figure 4.5* et l'encart 2.1 du chapitre 2).

Le système constitué de la masse m est étudié dans le référentiel terrestre galiléen. Il y a deux forces extérieures agissant sur le système : le poids $\vec{P} = m \vec{g}$ de la masse et la tension du ressort $\vec{T}$ du ressort. Avec un axe vertical orienté vers le bas et un vecteur unitaire $\vec{u}$ on peut écrire :

$$\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{T} = -k \Delta l \vec{u}$$

► Étude à l'équilibre : le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0} \Rightarrow mg - k \Delta l_e = 0 \quad (4.10)$$

► Étude en mouvement (instant t) : le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a} \Rightarrow mg - k \Delta l = m \ddot{x} \quad (4.11)$$

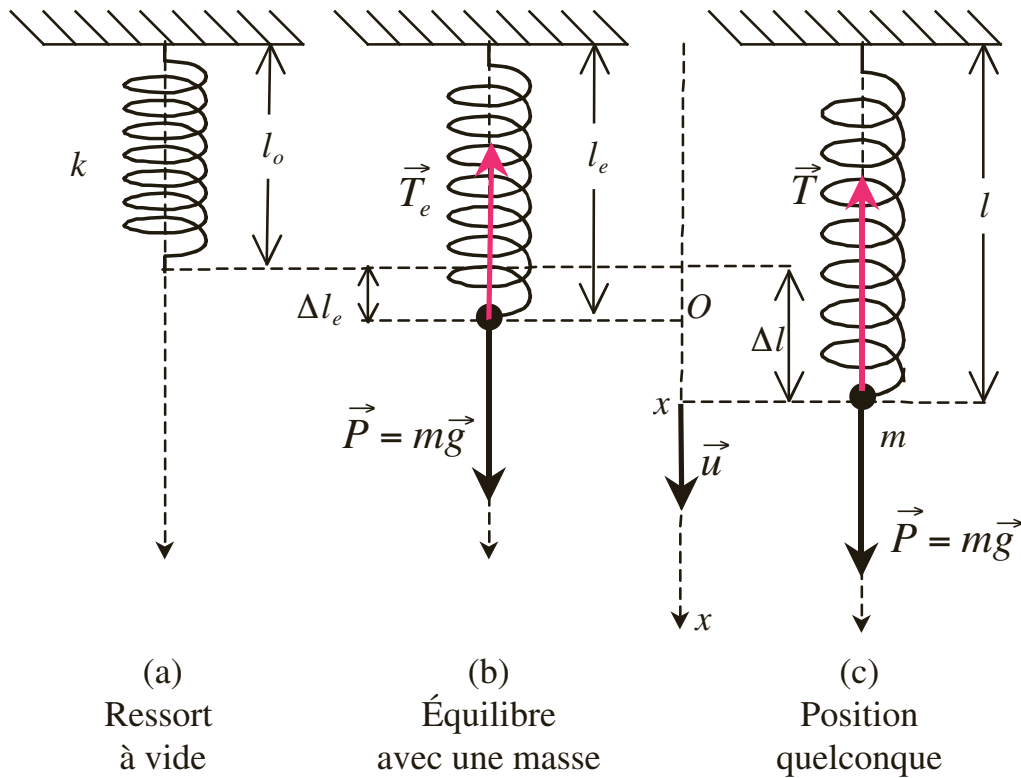


Figure 4.5 Pendule élastique vertical : la masse m , accrochée à l'extrémité libre du ressort est repérée par rapport à sa position d'équilibre.

L'allongement du ressort à l'instant t , avec l'origine coïncidant avec la position d'équilibre, est donné par l'expression (voir *figure 4.5* et l'encart 2.1 du chapitre 2) :

$$\Delta l = \Delta l_e + x \quad (4.12)$$

L'équation (4.11) s'écrit donc :

$$mg - k(\Delta l_e + x) = m\ddot{x} \Rightarrow mg - \Delta l_e - kx = m\ddot{x}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre (4.10) on obtient :

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.13)$$

L'équation différentielle est identique à celle obtenue pour le pendule élastique horizontal. Cependant il faut remarquer que la variable x ne représente pas la même chose dans les deux cas. Pour le ressort horizontal, la variable x correspond à l'allongement du ressort (origine prise lorsque le ressort est ni étiré, ni comprimé). Pour le ressort vertical, la variable x repère la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre pour laquelle le ressort présente déjà un allongement Δl_e .

Énergie mécanique pour le pendule élastique

Le pendule élastique sans frottement constitue un système conservatif. Les deux forces, poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et tension $\vec{T}$ du ressort, que subit la masse du système sont des forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle (voir chapitre 3).

- *Cas du pendule élastique horizontal* : le poids ne travaille pas. La masse reste à la même altitude et l'énergie potentielle de pesanteur est une constante au cours du mouvement de la masse. On peut choisir cette constante nulle (origine des énergies potentielles de pesanteur). Il ne reste donc que l'énergie potentielle élastique qui dépend de l'allongement du ressort. Cet allongement correspond à la variable x et l'énergie potentielle élastique s'écrit alors (voir chapitre 3 § 3.2.d, relation 3.46) :

$$E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2 \text{ avec } \Delta l = l - l_o = x \text{ allongement du ressort}$$

- *Cas du pendule élastique vertical* : cette fois le poids travaille au cours du mouvement de la masse. L'énergie potentielle associée au système peut s'écrire alors comme la somme deux termes : l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle élastique.

On peut aussi remarquer que la somme $(\vec{P} + \vec{T})$ des forces conservatives exercées sur la masse est une force conservative qui dérive de cette énergie potentielle.

La résultante $\vec{F}$ des forces s'écrit (relation 4.11 et 4.12) :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = [mg - k(\Delta l_e + x)]\vec{u}$$

En considérant la condition d'équilibre (4.10) $mg - k\Delta l_e = 0$, on a :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = -kx\vec{u}$$

La variable x représente ici la position de la masse par rapport à la position d'équilibre (voir figure 4.5). L'expression du travail élémentaire de cette résultante pour un déplacement élémentaire $dx\vec{u}$ permet d'obtenir l'énergie potentielle (voir chapitre 3 § 3.2.d, relation 3.46). On a :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -kx\vec{u} \cdot dx\vec{u} = -kxdx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -d(E_p)$$

On obtient donc comme expression de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{avec comme origine des énergies potentielles}$$

$$E_p(0) = 0.$$

Le résultat est identique à celui obtenu pour le pendule horizontal.



Il est intéressant de vérifier que cette énergie potentielle aurait pu être obtenue en effectuant la somme des énergies potentielles de pesanteur E_{PP} dont dérive le poids et élastique E_{PE} dont dérive la tension du ressort. Pour cela il faut choisir une origine commune pour les différentes énergies potentielles. Il est logique de prendre cette origine pour $x = 0$. Dans ces conditions, avec un axe Ox dirigé vers le bas, on a :

- $E_{PP} = -mgx$ (l'énergie potentielle de pesanteur diminue en descendant) (voir paragraphe 3.2.3.a).
- $E_{PE} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \text{constante}$ avec l'allongement $\Delta l = \Delta l_e + x$.
- $E_{PE}(x) = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 + \text{constante}$

L'origine étant prise pour $E_{PP}(0) = 0$ la constante n'est pas nulle et correspond à :

$$E_{PE}(0) = \frac{1}{2}k(\Delta l_e)^2 + \text{constante} \Rightarrow \text{constante} = -\frac{1}{2}k(\Delta l_e)^2$$

L'énergie potentielle élastique s'écrit alors :

$$E_{PE}(x) = \frac{1}{2}k(\Delta l_e + x)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l_e)^2$$

$$E_{PE}(x) = \frac{1}{2}k[x^2 + 2x\Delta l_e + (\Delta l_e)^2 - (\Delta l_e)^2] = \frac{1}{2}kx^2 + kx\Delta l_e$$

L'énergie potentielle totale du système est donc :

$$E_p = E_{PP} + E_{PE} = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + kx\Delta l_e$$

En utilisant la relation d'équilibre (4.10) $mg - k\Delta l_e = 0$, on a :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + x[k\Delta l_e - mg] = \frac{1}{2}kx^2$$

On retrouve évidemment la même expression. La deuxième méthode est évidemment un peu plus longue et il vaut donc mieux déterminer l'énergie potentielle à partir de la résultante des forces.

Dans les deux cas, l'énergie mécanique du système s'écrit :

$$E = E_C + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.14)$$



Il est possible de retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la conservation de l'énergie. En effet, le système étant conservatif l'énergie mécanique est une constante et sa dérivée est nulle (voir chapitre 3 § 3.2.f). On peut donc écrire :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow 2\frac{1}{2}m\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{1}{2}kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}[m\ddot{x} + kx] = 0$$

La vitesse n'étant pas une fonction identiquement nulle on en déduit :

$$\dot{x}[m\ddot{x} + kx] = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Le pendule pesant simple

C'est le cas d'une masse m suspendue à un fil de longueur l . La position d'équilibre correspond à la verticale du lieu.

On écarte la masse de cette position et on la lâche sans vitesse. On constate qu'elle oscille. Ce problème a été traité en exemple dans le chapitre 2 § 2.4 Points clefs c).

L'étude du mouvement de la masse se fait dans le référentiel terrestre galiléen. Les frottements étant négligés, il n'y a que le poids de la masse et la tension du fil comme forces extérieures au système. La masse décrit une portion de cercle de rayon l (longueur du fil). La tension du fil, dirigée suivant le fil, est une force radiale toujours perpendiculaire au déplacement de la masse. Le travail de la tension au cours du mouvement est donc nul.

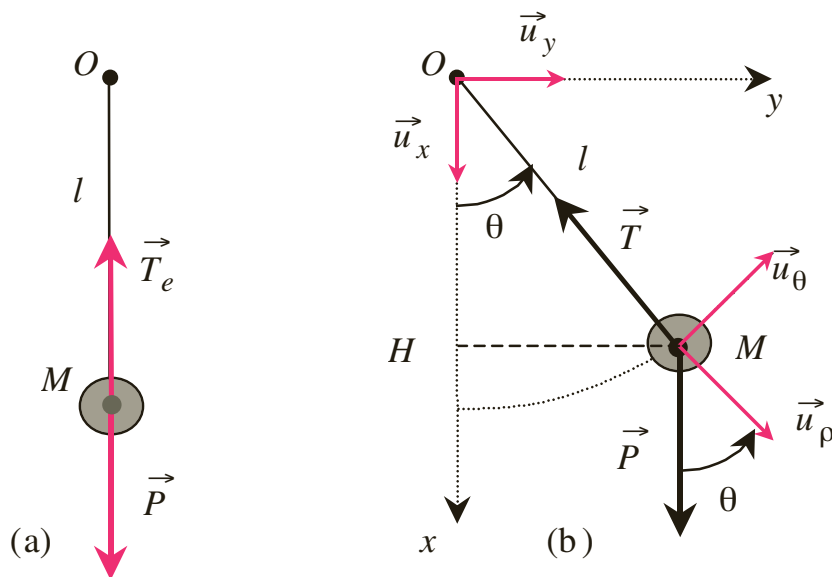


Figure 4.6 Le pendule simple en équilibre (a) et en mouvement (b)

Le système est conservatif. Il est possible alors de retrouver le résultat obtenu au paragraphe 2.5.c en considérant que l'énergie totale se conserve. Le système est parfaitement défini par la connaissance de la fonction $\theta(t)$ qui repère la position du fil par rapport à la verticale (voir *figure 4.6*). Il suffit d'exprimer l'énergie mécanique en fonction de cette variable.

L'énergie potentielle correspond à l'énergie potentielle de pesanteur. Avec un axe Ox vertical orienté vers le bas et comme origine $E_p(O) = 0$, cette énergie s'écrit (voir paragraphe 3.2.c) :

$$E_p = -mgx = -mgOH = -mgl\cos\theta \quad (4.15)$$

L'énergie cinétique s'exprime en fonction de la vitesse. Celle-ci peut s'écrire en coordonnées polaires (voir paragraphe 1.5.c relation 1.66) :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

L'expression de l'énergie cinétique est donc :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E = E_p + E_c = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, cette énergie est constante et sa dérivée par rapport au temps est nulle. On a donc :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow -mgl\frac{d}{dt}[\cos\theta] + \frac{1}{2}ml^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 0$$

$$-mgl\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}ml^2 2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0$$

$$mgl\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \Rightarrow ml\dot{\theta}[g\sin\theta + l\ddot{\theta}] = 0$$

La fonction vitesse angulaire n'étant pas identiquement nulle il reste :

$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Dans le cas où l'angle θ est petit c'est-à-dire lorsque le sinus est assimilable à l'angle, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (4.16)$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.17)$$

Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu au paragraphe (2.4 Points clefs c).



L'approximation angle « petit » signifie qu'on peut assimiler la valeur de l'angle en radian à son sinus. Pour un angle $\alpha = 20^\circ = 0,349$ rad on a $\sin 20^\circ = 0,342$. L'erreur relative commise en assimilant l'angle avec son sinus est de : $(0,349 - 0,342)/0,349 = 2\%$. Cette approximation est donc très souvent justifiée.



Il est logique de choisir l'origine des énergies potentielles lorsque la masse est dans sa position d'équilibre $\theta = 0$. Dans ces conditions, l'expression (4.15) de l'énergie potentielle devient :

$$E_p(\theta) = -mgl\cos\theta + C$$

La constante C se détermine avec le choix de l'origine des énergies :

$$E_p(0) = 0 \Rightarrow 0 = -mgl\cos 0 + C \Rightarrow C = mgl$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$E_p(\theta) = mgl[1 - \cos\theta]$$

Dans le cas où l'angle est suffisamment faible on peut écrire :

$$\sin\theta \approx \theta \quad \text{et} \quad \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$$

On obtient donc finalement :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad (4.18)$$

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E = E_p + E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad (4.19)$$

c) Étude énergétique de l'oscillateur harmonique

Dans le cas du pendule élastique, en utilisant l'expression (4.4) de la pulsation propre de l'oscillateur ($\omega_o^2 = k/m$), l'énergie mécanique (4.14) peut s'écrire :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_o^2x^2 \quad (4.20)$$

Dans le cas du pendule pesant simple, en utilisant l'expression (4.17) de la pulsation propre de l'oscillateur ($\omega_o^2 = g/l$), l'énergie mécanique (4.19) peut s'écrire :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\omega_o^2\theta^2 \quad (4.21)$$

Les expressions sont tout à fait similaires : la variable x du pendule élastique est analogue à la variable $(l\theta)$ du pendule pesant simple.

L'énergie instantanée est l'énergie de l'oscillateur à l'instant t . En prenant le cas, à titre d'exemple, du pendule élastique, il suffit de reporter dans l'expression (4.20) de l'énergie les expressions (4.5) de $x(t)$ et (4.8) de $\dot{x}(t)$. On obtient pour l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{et} \quad \dot{x} = -X_m\omega_o\sin(\omega_o t + \varphi) \\ \Rightarrow E_C &= \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pour l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2}m\omega_o^2 x^2 \quad \text{et} \quad x = X_m\cos(\omega_o t + \varphi) \\ \Rightarrow E_P &= \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E = E_C + E_P \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 [\cos^2(\omega_o t + \varphi) + \sin^2(\omega_o t + \varphi)]$$

Sachant que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et en utilisant la relation $k = m\omega_o^2$:

$$E = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \quad (4.24)$$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique de ce système conservatif ne varie pas au cours du temps : l'énergie mécanique est une constante du mouvement. Il y a échange continu entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. La *figure 4.7* montre l'évolution de ces diverses énergies au cours du temps. L'énergie potentielle est maximale lorsque $\cos^2(\omega_o t + \varphi) = 1$ c'est-à-dire lorsque $x(t) = \pm X_m$.

On a alors $E_P(t) = 1/2kX_m^2$ et $\sin^2(\omega_o t + \varphi) = 0$: l'énergie cinétique est nulle et minimale. Au contraire, l'énergie cinétique est maximale

lorsque la masse passe par sa position d'équilibre qui correspond alors à une énergie potentielle nulle minimale.

De plus, au cours d'une oscillation complète, la masse passe deux fois par sa position d'équilibre (dans un sens puis dans l'autre) et atteint deux fois une élongation maximale (X_m et $-X_m$). Les énergies potentielle et cinétique oscillent donc deux fois plus vite. La période des oscillations de ces énergies correspond à la moitié de la période propre T_o des oscillations.

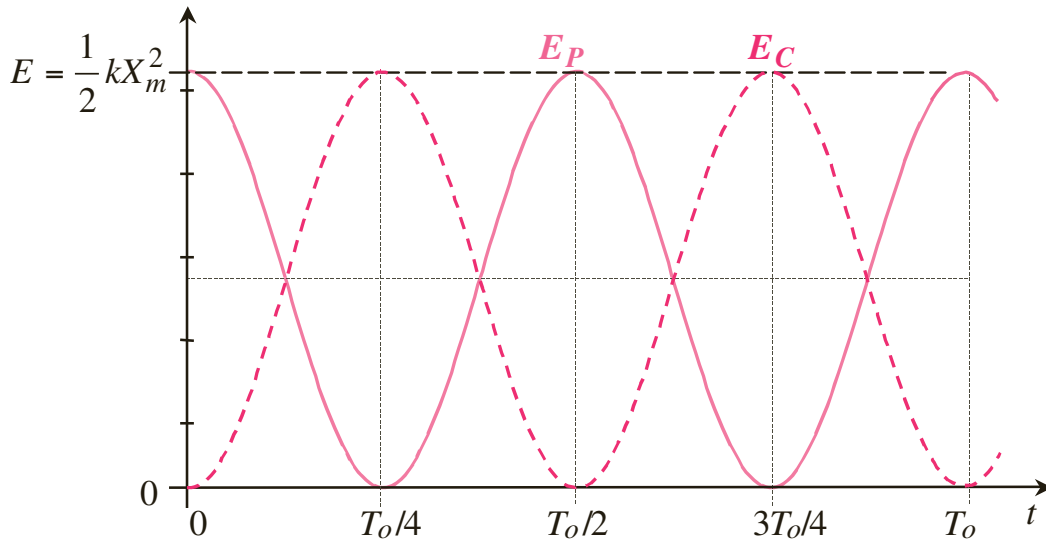


Figure 4.7 Représentation en fonction du temps des énergies potentielle $E_P(t)$, cinétique $E_C(t)$ et mécanique E . L'énergie mécanique est à tout instant une constante. Les énergies potentielle et cinétique oscillent avec une période égale à la moitié de la période propre T_o des oscillations $x(t)$.

Ce résultat peut se retrouver en utilisant les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

Les différentes énergies peuvent encore s'écrire :

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega_o^2 X_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{4} m \omega_o^2 X_m^2 [1 - \cos 2(\omega_o t + \varphi)]$$

$$E_P = \frac{1}{2} m \omega_o^2 X_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{4} m \omega_o^2 X_m^2 [1 + \cos 2(\omega_o t + \varphi)]$$

$$E_C = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 - \cos(2\omega_o t + 2\varphi)]$$

$$E_P = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 + \cos(2\omega_o t + 2\varphi)] = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 + \cos(2\omega_o t + 2\varphi + \pi)]$$

Ces expressions montrent bien que les énergies potentielle et cinétique sont en opposition de phase (déphasage de π l'une par rapport à l'autre voir *figure 4.7*) et qu'elles oscillent avec une pulsation de $2\omega_o$ (double de la pulsation propre) et donc avec une période deux fois plus faible que la période propre.



Il est possible de déterminer la valeur moyenne temporelle de ces énergies en remarquant que la valeur moyenne d'un cosinus ou sinus sur un nombre entier de périodes est nulle (fonctions symétriques par rapport à l'axe des temps) on a :

$$\langle E_C \rangle_t = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 + \langle \cos(2\omega_o t + 2\varphi) \rangle_t] = \frac{1}{4} k X_m^2$$

$$\langle E_P \rangle_t = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 - \langle \cos(2\omega_o t + 2\varphi) \rangle_t] = \frac{1}{4} k X_m^2$$

On a donc le résultat suivant :

$$\langle E_C \rangle_t = \langle E_P \rangle_t = \frac{1}{4} k X_m^2 = \frac{1}{2} E$$

4.2 OSCILLATEUR AMORTI PAR FROTTEMENT VISQUEUX

Le pendule élastique comme le pendule pesant, se comporte comme un oscillateur harmonique à la condition de négliger tout frottement. Il oscille alors théoriquement sans jamais s'arrêter. En réalité, la masse se déplace dans un fluide (en général l'air) et il existe donc toujours des forces de frottement de type visqueux. La forme de la masse qui se déplace ainsi que la viscosité du milieu ambiant peuvent faire que ces forces de frottements ne soient plus négligeables. L'oscillateur est alors amorti et fini par s'arrêter.

a) Équation différentielle et solutions

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment en ajoutant une force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux α) de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}$$

L'équation différentielle (4.13) du mouvement de la masse devient :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m \vec{a} \Rightarrow mg - k(\Delta l_e + x) - \alpha \dot{x} = m \ddot{x}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre (4.10) $mg = k\Delta l_e$, on a :

$$-kx - \alpha \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.25)$$

Ce n'est plus l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique mais celui d'un oscillateur amorti par frottement fluide. Pour alléger les expressions qui viendront par la suite, il est pratique (la raison apparaîtra un peu plus loin) de poser :

$$\frac{\alpha}{m} = 2\lambda \quad \text{et} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (4.26)$$

ω_o correspond à la pulsation propre de l'oscillateur c'est-à-dire la pulsation avec laquelle il oscillerait de façon sinusoïdale si les frottements étaient négligeables : l'oscillateur est alors un oscillateur harmonique.



Le coefficient de frottement α est homogène à une force divisée par une vitesse c'est-à-dire une masse multipliée par une accélération divisée par une vitesse. Ce coefficient s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et donc le coefficient λ en s^{-1} .

Finalement l'équation différentielle de l'oscillateur amorti s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (4.27)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du deuxième degré. Les solutions sont exponentielles. En effet il s'agit de trouver une fonction solution dont la dérivée seconde et première sont proportionnelles à la fonction elle-même. Nous cherchons la solution sous la forme :

$$x = Ae^{rt} \quad (4.28)$$

La détermination de r se fait en reportant cette solution dans l'équation différentielle. On peut écrire :

$$\dot{x} = \frac{d(Ae^{rt})}{dt} = rAe^{rt} = rx$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d(Ae^{rt})}{dt} = Ar^2e^{rt} = r^2x$$

Le report de cette solution dans l'équation différentielle conduit à :

$$\forall t \quad \left(r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m}\right)Ae^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2 = 0 \quad (4.29)$$

L'équation (4.29) s'appelle *équation caractéristique* de l'équation différentielle. Sa résolution permet de déterminer les solutions de l'équation différentielle dans les différents régimes d'amortissement. Comme il s'agit d'une équation du second degré, il importe de distinguer trois cas qui correspondent à la valeur positive, nulle ou négative du discriminant. Le discriminant de cette équation s'écrit :

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega_o^2 = 4(\lambda^2 - \omega_o^2) \quad (4.30)$$

La forme des solutions dépend du signe de ce discriminant :

- Cas $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha > 2\sqrt{km}$. Il existe alors 2 racines réelles. Cela correspond au cas où le coefficient de frottement est suffisamment grand. L'amortissement est fort.
- Cas $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha < 2\sqrt{km}$. Il n'y a pas de racines réelles mais deux racines complexes. Cela correspond au cas où le coefficient de frottement est suffisamment petit. L'amortissement est faible.
- Cas $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{km} = \alpha_C$. Il existe une racine double réelle. C'est un cas particulier où l'amortissement est intermédiaire aux deux amortissements précédents et qui est appelé amortissement critique. Le coefficient de frottement a alors une valeur particulière dépendant de la raideur k du ressort et de masse m .

b) Oscillateur à frottement faible

Expression de l'élongation $x(t)$

C'est le cas où les frottements ne sont pas trop importants et où le discriminant de l'équation caractéristique est négatif. On a la condition :

$$\Delta < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha < 2\sqrt{km} \quad (4.31)$$

En faisant apparaître le signe négatif puis en introduisant l'imaginaire pur i tel que $i^2 = -1$, le discriminant (4.30) peut s'écrire :

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_o^2) = -4(\omega_o^2 - \lambda^2) = 4i^2(\omega_o^2 - \lambda^2)$$

Les racines du discriminant sont des complexes imaginaires purs (voir *annexe* pour les rappels sur les complexes) et s'écrivent :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4i^2(\omega_o^2 - \lambda^2)} = \pm 2i\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc :

$$r_{\pm} = \frac{-2\lambda \pm 2i\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}{2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

Posons $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$ on obtient les deux racines complexes :

$$\begin{cases} r_+ = -\lambda + i\Omega \\ r_- = -\lambda - i\Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

Les deux solutions possibles de l'équation différentielle sont :

$$\begin{aligned} x_+ &= A_+ e^{r_+ t} = A_+ e^{(-\lambda + i\Omega)t} = e^{-\lambda t} A_+ e^{i\Omega t} \\ x_- &= A_- e^{r_- t} = A_- e^{(-\lambda - i\Omega)t} = e^{-\lambda t} A_- e^{-i\Omega t} \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc une combinaison linéaire de ces deux solutions et s'écrit :

$$x(t) = x_+ + x_- = e^{-\lambda t} [A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}] \quad (4.33)$$

avec $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$ et $\lambda = \alpha/2m$

Les coefficients A_+ et A_- dépendent des conditions initiales. On peut montrer que se sont deux complexes conjugués (voir encart 4.2) ce qui permet de donner une expression réelle de la solution sous la forme :

$$x(t) = X_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.34)$$

avec X_m et φ deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Enfin, en décomposant le cosinus (voir paragraphe 4.1.a) il est possible d'écrire aussi :

$$x(t) = e^{-\lambda t} [X_o \cos \Omega t + Y_o \sin \Omega t] \quad (4.35)$$

avec X_o et Y_o deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Encart 4.2 Régime pseudo-périodique

La solution de l'équation différentielle de l'oscillateur faiblement amorti est de la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}]$$

Les constantes A_+ et A_- dépendent des conditions initiales. Du point de vue mathématique elles peuvent être des complexes. Cependant, la solution doit être réelle puisque physiquement on observe un mouvement de la masse. La somme, entre crochets, des deux termes complexes doit donc donner un réel. Les parties imaginaires de ces deux complexes doivent donc être opposées. Posons :

$$A_+ = a + ib \text{ et } A_- = c + id$$

On a alors :

$$A_+ e^{i\Omega t} = (a + ib)(\cos\Omega t + i\sin\Omega t)$$

$$A_+ e^{i\Omega t} = (a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + i(b\cos\Omega t + a\sin\Omega t)$$

$$A_- e^{-i\Omega t} = (c + id)(\cos\Omega t - i\sin\Omega t)$$

$$A_- e^{-i\Omega t} = (c\cos\Omega t + d\sin\Omega t) + i(d\cos\Omega t - c\sin\Omega t)$$

La condition $\text{Im}(A_+ e^{i\Omega t}) + \text{Im}(A_- e^{-i\Omega t}) = 0$ se traduit par :

$$(b\cos\Omega t + a\sin\Omega t) + (d\cos\Omega t - c\sin\Omega t) = 0$$

$$\forall t ; (b + d)\cos\Omega t + (a - c)\sin\Omega t = 0$$

Ceci impose donc les relations : $a = c$ et $d = -b$. On a alors :

$$A_+ = a + ib \text{ et } A_- = a - ib$$

Les constantes sont conjuguées et peuvent s'écrire :

$$A_+ = Ae^{i\varphi} \text{ et } A_- = A_+^* = Ae^{-i\varphi}$$

Finalement on obtient le résultat suivant :

$$[A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}] = Ae^{i\varphi} e^{i\Omega t} + Ae^{-i\varphi} e^{-i\Omega t} = A(e^{i(\Omega t + \varphi)} + e^{-i(\Omega t + \varphi)})$$

$$[A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}] = A[2\cos(\Omega t + \varphi)]$$

En posant $2A = X_m$, l'élongation $x(t)$ peut s'écrire :

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}] = X_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

Exemple de calcul pour la détermination des constantes

Les conditions initiales les plus souvent utilisées correspondent au cas où on tire sur le ressort jusqu'à une amplitude $X_{\max}$ et on lâche sans vitesse initiale. Cela se traduit donc par :

$$x(t = 0) = X_{\max} \text{ et } \dot{x}(t = 0) = 0$$

En utilisant l'expression (4.35) on obtient simplement la relation :

$$x(t) = e^{-\lambda t}[X_o \cos \Omega t + Y_o \sin \Omega t] \Rightarrow x(0) = X_o = X_{\max}$$

La dérivée de l'élongation donne la vitesse qui s'écrit comme la dérivée d'un produit de fonction. On obtient :

$$\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t}[X_o \cos \Omega t + Y_o \sin \Omega t] + e^{-\lambda t}[-X_o \Omega \sin \Omega t + Y_o \Omega \cos \Omega t]$$

Les conditions initiales se traduisent donc par :

$$\begin{cases} x(0) = X_o = X_{\max} \\ \dot{x}(0) = -\lambda X_o + Y_o \Omega = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues ne présente pas de difficulté et donne :

$$X_o = X_{\max} \quad \text{et} \quad Y_o = \frac{\lambda}{\Omega} X_o$$

L'expression de l'élongation s'écrit alors :

$$x(t) = X_{\max} e^{-\lambda t} \left[\cos \Omega t + \frac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right]$$

ou encore, en remplaçant λ par son expression (4.26) :

$$x(t) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \left[\cos \Omega t + \frac{\alpha}{2m\Omega} \sin \Omega t \right] \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

Le régime pseudo-périodique

Dans le cas de faible amortissement, la solution $x(t)$ est donc de la forme (voir 4.34) :

$$x(t) = X_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

avec $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$ et $\lambda = \alpha/2m$

La figure 4.8 représente l'allure de cette fonction au cours du temps avec les conditions initiales du paragraphe vu précédemment. L'élongation $x(t)$ s'écrit comme le produit d'une exponentielle décroissante avec une fonction sinusoïdale.

La fonction cosinus variant entre -1 et $+1$, l'élongation $x(t)$ va osciller en restant comprise entre $-X_m \exp(-\lambda t)$ et $X_m \exp(-\lambda t)$. Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par x lorsque le temps s'écoule. La décroissance de la fonction exponentielle est guidée par le coefficient $\lambda = \alpha/2m$ qui traduit l'amortissement plus ou moins prononcé du mouvement. Lorsque α est nul le mouvement est non amorti et l'on retombe sur le cas de l'oscillateur harmonique.

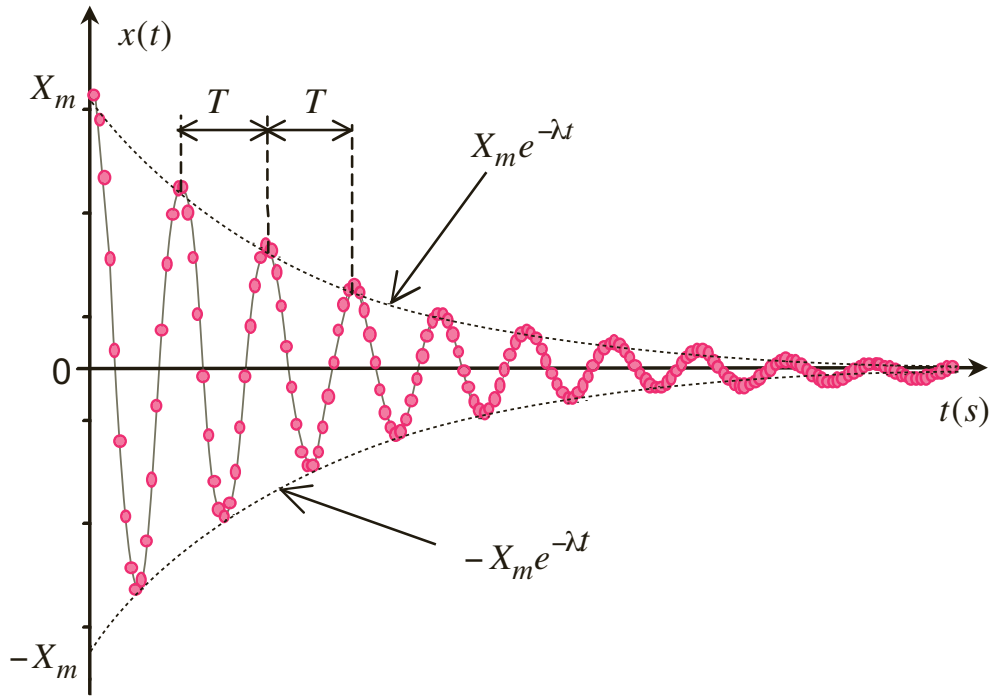


Figure 4.8 Mouvement d'un oscillateur amorti par frottement fluide dans le cas d'un amortissement faible. L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle (traits pointillés). Le régime est pseudo périodique, T représente la pseudo-période.

Le terme $\cos(\Omega t + \varphi)$ traduirait la périodicité du mouvement s'il n'y avait pas d'amortissement. Le mouvement n'est plus périodique puisqu'au bout du temps T l'élongation de l'oscillateur ne reprend pas la même valeur : $x(t) \neq x(t + T)$ l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. On parle donc de mouvement pseudo-périodique. La pseudo-période T correspond à l'intervalle de temps qui sépare deux passages par la position d'équilibre $x = 0$ dans le même sens ou qui sépare deux maxima consécutifs (voir *figure 4.8*). Elle est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} \quad \text{et} \quad \lambda = \alpha/2m \quad (4.36)$$

La grandeur Ω s'appelle la pseudo-pulsation et est inférieure à la pulsation propre ω_o . La pseudo-période peut s'exprimer en faisant apparaître la période propre T_o de l'oscillateur harmonique (absence de frottement) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_o^2}}} = T_o \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_o^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > T_o \quad (4.37)$$

La pseudo-période est supérieure à la période propre. Du fait des frottements, la masse met un peu plus de temps pour faire un aller et retour et l'amplitude de son mouvement diminue.

Dans le cas où l'oscillateur est très faiblement amorti ($\lambda \ll \omega_o$) il est possible de donner une expression approchée de la pseudo-pulsation et de la pseudo-période. On a :

$$\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} = \omega_o \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_o^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avec l'approximation suivante : $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow (1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$, on a :

$$\frac{\lambda}{\omega_o} \ll 1 \Rightarrow \Omega \approx \omega_o \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\omega_o^2} \right)$$

La pseudo-pulsation Ω est voisine de la pulsation propre ω_o . De même pour la pseudo-période : la relation 4.37 devient :

$$T = T_o \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_o^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_o \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\omega_o^2} \right) > T_o$$

Pour $\lambda \leq 0,1\omega_o$, on constate que $T \approx T_o$ avec une erreur relative inférieure à 0,5 %. L'expression de T s'écrit encore, avec $\lambda = \alpha/2m$:

$$T = T_o \left(1 + \frac{\alpha^2}{8m^2\omega_o^2} \right) > T_o \quad (4.38)$$

La pseudo-période T a une valeur très proche de la période propre T_o .

La détermination du coefficient de frottement α (ou du facteur λ) peut se faire expérimentalement en comparant la valeur de deux maxima consécutifs. Si le $n^{\text{ième}}$ maximum est atteint à la date $t = t_n$, le maximum suivant apparaît à la date $t_{n+1} = t_n + T$. Pour ces deux dates, l'élongation $x(t)$ s'écrit :

$$x(t_n) = x_n = X_m e^{-\lambda t_n} \cos(\Omega t_n + \varphi) \quad (4.39a)$$

$$x(t_{n+1}) = x_{n+1} = x(t_n + T) = X_m e^{-\lambda(t_n + T)} \cos[\Omega(t_n + T) + \varphi]$$

En tenant compte que $\Omega T = 2\pi$, l'expression de $x(t_{n+1})$ devient :

$$x_{n+1} = X_m e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda T} \cos[\Omega t_n + \Omega T + \varphi] = X_m e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda T} \cos[\Omega t_n + 2\pi + \varphi]$$

$$x_{n+1} = X_m e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda T} \cos(\Omega t_n + \varphi) \Rightarrow x_{n+1} = e^{-\lambda T} x_n \quad (4.39b)$$

Il est pratique pour caractériser l'amortissement d'introduire une grandeur δ appelée décrément logarithmique et définie par :

$$\delta = \left| \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \ln \frac{x_n e^{-\lambda T}}{x_n} \right| = \left| \ln e^{-\lambda T} \right| = \lambda T \quad (4.40)$$

La mesure expérimentale de δ et celle de T permet donc d'accéder au facteur λ c'est-à-dire au coefficient d'amortissement α donné par :

$$\delta = \lambda T = \frac{\alpha}{2m} T \Rightarrow \alpha = \frac{2m}{T} \delta$$

c) Oscillateur à frottement fort

Expression de l'élongation $x(t)$

C'est le cas où les frottements sont plus importants c'est-à-dire lorsque le coefficient d'amortissement vérifie la condition :

$$\lambda > \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha > 2\sqrt{km} \quad (4.41)$$

Dans ces conditions le discriminant (4.30) est positif et il existe alors deux racines réelles pour l'équation caractéristique. On a :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(\lambda^2 - \omega_o^2)} = \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} = \pm 2\beta$$

avec $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}$.

Les solutions sont donc :

$$r_{\pm} = \frac{-2\lambda \pm 2\beta}{2} = -\lambda \pm \beta$$

Sachant que $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} < \lambda$ on obtient les deux racines réelles négatives suivantes :

$$\begin{cases} r_+ = -\lambda + \beta = -(\lambda - \beta) < 0 \\ r_- = -\lambda - \beta = -(\lambda + \beta) < 0 \end{cases}$$

Les deux solutions possibles de l'équation différentielle sont donc des exponentielles décroissantes de la forme :

$$x_+ = A_+ e^{r_+ t} = A_+ e^{-(\lambda - \beta)t}$$

$$x_- = A_- e^{r_- t} = A_- e^{-(\lambda + \beta)t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire de ces deux solutions et s'écrit :

$$x(t) = x_+ + x_- = A_+ e^{-(\lambda - \beta)t} + A_- e^{-(\lambda + \beta)t} \quad (4.42)$$

avec $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}$ et $\lambda = \alpha/2m$

Exemple de calcul pour la détermination des constantes

Reprenons les conditions initiales les plus souvent utilisées correspondant au cas où on tire sur le ressort jusqu'à une amplitude $X_{\max}$ et on lâche sans vitesse initiale. Cela se traduit donc par :

$$x(t=0) = X_{\max} \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

En utilisant l'expression (4.42) on obtient la relation :

$$x(0) = A_+ + A_- = X_{\max}$$

La vitesse $\dot{x}(t)$ est obtenue en dérivant l'élongation $x(t)$. On a :

$$\dot{x}(t) = -(\lambda - \beta)e^{-(\lambda - \beta)t} - (\lambda + \beta)e^{-(\lambda + \beta)t}$$

Les conditions initiales se traduisent donc par :

$$\begin{cases} x(0) = X_{\max} = A_+ + A_- \\ \dot{x}(0) = 0 = -(\lambda - \beta)A_+ - (\lambda + \beta)A_- \end{cases}$$

On obtient le système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{cases} (1) & A_+ + A_- = X_{\max} \\ (2) & (\lambda - \beta)A_+ + (\lambda + \beta)A_- = 0 \end{cases}$$

On élimine le coefficient A_- en multipliant l'équation (1) par $(\lambda + \beta)$ puis en lui soustrayant (2) membre à membre. On obtient :

$$(1)(\lambda + \beta) - (2) \Rightarrow (\lambda + \beta)A_+ - (\lambda - \beta)A_+ = (\lambda + \beta)X_{\max}$$

$$[(\lambda + \beta) - (\lambda - \beta)]A_+ = (\lambda + \beta)X_{\max}$$

$$2\beta A_+ = (\lambda + \beta)X_{\max} \Rightarrow A_+ = \frac{X_{\max}(\lambda + \beta)}{2\beta}$$

$$A_+ = \frac{X_{\max}}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta} \right)$$

Le coefficient A_- peut s'obtenir à partir de l'équation (1) :

$$A_- = X_{\max} - A_+ = X_{\max} - \frac{X_{\max}}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta} \right)$$

$$A_- = \frac{X_{\max}}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta} \right)$$

Finalement, l'élongation s'écrit :

$$x(t) = \frac{X_{\max}}{2} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\beta}\right) e^{-(\lambda - \beta)t} + \left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right) e^{-(\lambda + \beta)t} \right]$$

ou encore :

$$x(t) = \frac{X_{\max}}{2} e^{-\lambda t} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\beta}\right) e^{-\beta t} + \left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right) e^{-\beta t} \right]$$



Cette solution peut encore s'écrire en introduisant les fonctions sinus et cosinus hyperboliques :

$$x(t) = X_{\max} e^{-\lambda t} \left[\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + \frac{\lambda}{\beta} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right]$$

$$x(t) = X_{\max} e^{-\lambda t} \left[\cosh(\beta t) + \frac{\lambda}{\beta} \sinh(\beta t) \right]$$

Le régime apériodique

La figure 4.9 donne l'allure de la fonction $x(t)$ pour un amortissement fort avec les conditions initiales du paragraphe précédent. Il n'y a plus d'oscillation : l'oscillateur retourne vers sa position d'équilibre sans osciller (l'élongation garde toujours le même signe). Le régime est dit apériodique (absence de période).

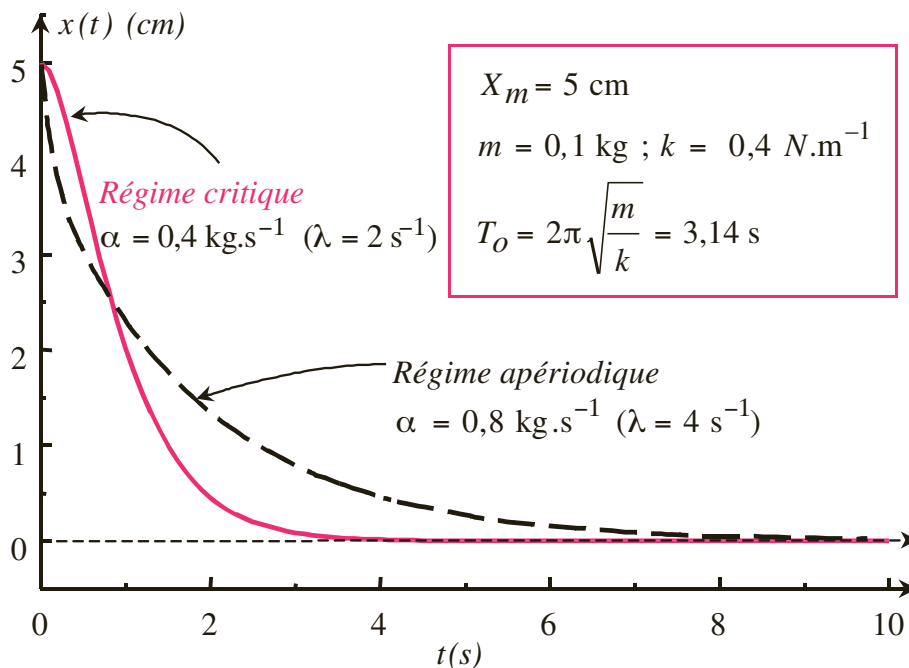


Figure 4.9 Exemple de mouvement d'un oscillateur amorti par frottement fluide dans le cas d'un amortissement fort (pointillé) et critique (trait plein). L'élongation décroît de façon exponentielle sans aucune oscillations (conditions initiales $x(0) = X_m$ et vitesse initiale nulle).



La décroissance d'une exponentielle $\exp(-|r|t)$ est caractérisée par le temps $\tau = 1/|r|$ au bout duquel l'exponentielle est divisée par « e ». Après une durée de l'ordre de 4 à 5 τ l'exponentielle est pratiquement nulle. Le temps caractéristique ou temps de relaxation de l'oscillateur en régime apériodique va être déterminé par l'évolution de l'exponentielle la plus lente parmi les deux exponentielles décroissantes qui interviennent dans l'expression de $x(t)$. D'après (4.2.c) $|r_+| = \lambda - \beta < |r_-| = \lambda + \beta$. Des deux temps caractéristiques $\tau_+ = 1/|r_+|$ et $\tau_- = 1/|r_-|$ c'est le plus grand qui correspondra au temps de relaxation de l'oscillateur c'est-à-dire le temps $\tau_+ = 1/|r_+|$.

Dans l'exemple du régime apériodique de la figure 4.9 on a $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = 4 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Les valeurs des facteurs λ et β sont $\lambda = \frac{\alpha}{2m} = 4 \text{ s}^{-1}$ et $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ s}^{-1}$. Le temps de relaxation de l'oscillateur fortement amorti est alors d'environ :

$$\tau_+ = \frac{1}{|r_+|} = \frac{1}{\lambda - \beta} \approx \frac{1}{0,536} \approx 1,87 \text{ s}.$$

On vérifie bien qu'au bout de $5\tau_+ \approx 9,3 \text{ s}$ l'oscillateur est revenu à la position d'équilibre.

d) Cas limite de l'amortissement critique

Expression de l'élongation $x(t)$

C'est le cas très particulier où le coefficient d'amortissement prend une valeur qui annule le discriminant de l'équation caractéristique. On a donc :

$$\lambda = \omega_o \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{km} \quad (4.43)$$

Dans ces conditions le discriminant (4.30) est nul et il existe une racine double réelle pour l'équation caractéristique. La solution est :

$$r = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda = -\omega_o$$

La solution générale de l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur est alors :

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_o t} \quad (4.44)$$

avec les constantes A et B dépendant des conditions initiales.



Exemple de calcul pour la détermination des constantes

Reprenons les conditions initiales habituelles (voir 4.2.b) :

$$x(t=0) = X_{\max} \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

En utilisant l'expression (4.44) on obtient la relation :

$$x(0) = B = X_{\max}$$

La vitesse $\dot{x}(t)$ est obtenue en dérivant l'élongation $x(t)$ qui se présente comme un produit de fonction. On a :

$$\dot{x}(t) = A e^{-\omega_o t} + (At + B)(-\omega_o) e^{-\omega_o t} = (A - B\omega_o - A\omega_o t) e^{-\omega_o t}$$

Les conditions initiales se traduisent donc par :

$$\begin{cases} x(0) = X_{\max} = B \\ \dot{x}(0) = 0 = A - B\omega_o \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations est simple et donne :

$$\begin{cases} B = X_{\max} \\ A = B\omega_o = \omega_o X_{\max} \end{cases}$$

L'élongation $x(t)$ est donc de la forme :

$$x(t) = X_{\max}(\omega_o t + 1)e^{-\omega_o t}$$

Le régime critique

La *figure 4.9* représente l'élongation $x(t)$ dans ce cas particulier appelé le régime critique. Là encore, il y a retour à la position d'équilibre sans aucune oscillation (l'amplitude garde le même signe). Il faut noter que ce retour se fait plus rapidement que pour le régime apériodique.

Le temps de relaxation pour le régime critique correspond à $\tau_c = 1/\omega_o$. En reprenant les valeurs numériques de la *figure 4.9*, on a $\omega_o^2 = k/m = 4 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et on obtient $\tau_c = 1/\omega_o = 0,5 \text{ s}$. Au bout d'environ 2,5 s à 3 s l'oscillateur est revenu à la position d'équilibre.

De façon général, le temps de relaxation τ_+ pour le régime apériodique est toujours plus important que celui τ_c du régime critique ce qui revient à dire qu'on a toujours la relation :

$$|r_+| = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} < \omega_o. \quad \text{En effet, cette condition revient à écrire :}$$

$$\lambda < \omega_o + \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} \Rightarrow \lambda^2 < \omega_o^2 + (\lambda^2 - \omega_o^2) + 2\omega_o \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} ;$$

$$\text{On obtient la condition toujours vérifiée : } 0 < 2\omega_o \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}$$

Contrairement à ce qu'on aurait pu penser, un amortissement trop important retarde le retour à l'équilibre de l'oscillateur. Dans le cas où on désire un retour rapide à l'équilibre (par exemple pour les amortisseurs d'une automobile) il vaut mieux se rapprocher le plus possible du régime critique défini par $\lambda = \alpha/2m = \omega_o \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{mk}$.

e) Étude énergétique de l'oscillateur amorti

Contrairement à l'oscillateur harmonique, l'oscillateur amorti n'est pas un système conservatif. L'énergie du système n'est pas une constante et sa variation au cours du temps va correspondre au travail négatif des forces de frottement. Cette énergie diminue et la perte correspondante est en général évacuée sous forme de chaleur.

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique (voir chapitre 3) on obtient :

$$dE = \delta W(\vec{F}_{ext}^{NC}) = \vec{f} \cdot d\vec{l} = -\alpha \vec{v} \cdot (\vec{v} dt) = -\alpha v^2 dt$$

La variation d'énergie par unité de temps est donc égale à :

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2 < 0$$

On retrouve bien une variation négative de l'énergie c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.

Un oscillateur n'est jamais vraiment harmonique mais est souvent faiblement amorti. Pour qu'il puisse osciller comme un oscillateur harmonique il sera nécessaire d'apporter régulièrement de l'énergie pour compenser la perte. C'est le rôle par exemple du contre-poids dans une horloge à balancier. On obtient ainsi un oscillateur entretenu qui peut servir à mesurer le temps.

Dans le cas d'un amortissement très faible il est possible d'estimer la perte d'énergie au cours de chaque oscillation. Pour cela il suffit de comparer les énergies mécaniques de l'oscillateur $E(t_n)$ à l'instant t_n correspondant au $n^{\text{ième}}$ maximum et $E(t_{n+1})$ à l'instant $t_{n+1} = t_n + T$ quand l'oscillateur atteint le maximum suivant après une durée correspondant à une pseudo-période. Si $x(t_n) = x_n$ (voir relation 4.39a) alors $x(t_{n+1}) = x_{n+1} = e^{-\lambda T} x_n$ (voir relation 4.39b). Pour ces deux positions l'énergie cinétique est nulle et l'énergie mécanique est donc égale uniquement à l'énergie potentielle du système. On peut écrire :

$$E(t_n) = \frac{1}{2} k x_n^2 \quad \text{et} \quad E(t_{n+1}) = \frac{1}{2} k x_{n+1}^2 = \frac{1}{2} k (e^{-\lambda T} x_n)^2 = \frac{1}{2} k e^{-2\lambda T} x_n^2$$

Le rapport des ces deux énergies donne :

$$\frac{E(t_{n+1})}{E(t_n)} = \frac{\frac{1}{2}kx_n^2 e^{-2\lambda T}}{\frac{1}{2}kx_n^2} = e^{-2\lambda T}$$

La variation relative d'énergie mécanique, en valeur absolue, au cours d'une pseudo-période est donnée par :

$$\frac{|\Delta E|}{E(t_n)} = \left| \frac{E(t_{n+1}) - E(t_n)}{E(t_n)} \right|$$

Sachant que l'énergie diminue avec le temps on obtient :

$$\frac{|\Delta E|}{E(t_n)} = \frac{E(t_n) - E(t_{n+1})}{E(t_n)} = 1 - e^{-2\lambda T}$$

► Cas d'un oscillateur très faiblement amorti : $\lambda/\omega_o \ll 1$.

Dans ces conditions, la pseudo période T est voisine de la période propre T_o de l'oscillateur harmonique sans amortissement (voir relation 4.38). La perte relative d'énergie sur une période devient :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\lambda T_o} \quad \text{avec} \quad 2\lambda T_o = 2\lambda \frac{2\pi}{\omega_o} = 4\pi \frac{\lambda}{\omega_o} \ll 1$$

Le coefficient de l'exponentielle étant très faible, il est possible de faire un développement limité au premier ordre de la fonction exponentielle et d'utiliser l'approximation suivante : $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.

L'expression de la perte relative d'énergie devient :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\lambda T_o} \approx 1 - (1 - 2\lambda T_o) = 2\lambda T_o$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 2\lambda T_o = \frac{2\lambda}{\omega_o} 2\pi$$

Pour caractériser la dissipation d'énergie il est pratique d'introduire un coefficient sans dimension appelé *facteur de qualité*, noté Q et défini par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie du système}}{\text{perte d'énergie par période}} \quad (4.45)$$

Plus ce facteur Q est important et plus la perte relative d'énergie est faible. Il est infini pour l'oscillateur harmonique. Ce facteur vaut ici :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\omega_o}{2\lambda} \quad (4.46)$$

Dans le cas du ressort amorti, avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on a :

$$Q = \frac{\omega_o}{2\lambda} = \frac{m\omega_o}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_o} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{mk} \quad (4.47)$$

Plus l'amortissement est faible (petite valeur du coefficient de frottement) et plus ce facteur Q est important (moins de perte relative d'énergie). Q augmente aussi avec l'inertie m et la raideur k de l'oscillateur.



Ce facteur de qualité peut s'exprimer en fonction du décrément logarithmique $\delta = \lambda T = |\ln(x_{n+1}/x_n)|$ (voir (4.40)). La perte relative d'énergie s'écrit :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\lambda T} = 1 - e^{-2\delta}$$

Si l'amortissement est très faible on a $\delta \ll 1$ et on peut écrire :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta$$

On obtient alors :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta}$$



L'équation différentielle de l'oscillateur peut s'écrire en fonction du facteur Q . On a alors :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (4.48)$$

Le coefficient α/m étant homogène à l'inverse d'un temps on peut toujours l'écrire comme étant proportionnel à la pulsation ω_o , le coefficient de proportionnalité étant sans dimension et noté $1/Q$. Avec ces nouvelles notations, le type de régime qui sera solution de l'équation dépendra de la valeur de ce facteur. Le discriminant de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\Delta = \frac{\omega_o^2}{Q^2} - 4\omega_o^2 = 4\omega_o^2 \left(\frac{1}{(2Q)^2} - 1 \right)$$

On a aura donc les conditions suivantes :

► $\Delta > 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Le régime est apériodique

- $\Delta = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Le régime est critique
- $\Delta < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Le régime est pseudo-périodique.



Le facteur Q ainsi défini ne correspond à la définition (4.45) que si l'amortissement est suffisamment faible c'est-à-dire que les approximations effectuées soit raisonnablement valables.



Exemple : pour $\delta = 0,01$ soit $\delta = \pi/Q = 1\% \Rightarrow Q = 31,4$ on a :

$$1 - e^{-2\delta} = 0,0198 \text{ et } 2\delta = 0,02 \text{ c'est-à-dire } 1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta \text{ à } 1\% \text{ près.}$$

On peut donc considérer que le facteur Q rend bien compte de la perte relative d'énergie par période dès qu'il est supérieure à 30.



La relation (4.38) permet de déterminer l'erreur relative commise lorsqu'on confond T avec T_o . On a :

$$\frac{\Delta T}{T_o} = \frac{T - T_o}{T_o} = \frac{T}{T_o} - 1 = \frac{\lambda^2}{2\omega_o^2} = \frac{1}{8Q^2}$$

Ainsi dès que l'on a $Q > 3,5$ on peut dire que $T \approx T_o$ avec une erreur relative inférieure à 1 %.



POINTS CLEFS

- *Oscillateur harmonique :*

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \\ x(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t \end{cases}$$

L'énergie mécanique se conserve : $E = E_p + E_c = \text{constante}$

- *Oscillateur amorti (frottement visqueux)*

$$\text{Équation différentielle : } \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

- ω_o pulsation propre. Pour le pendule élastique : $\omega_o = \sqrt{k/m}$
- λ facteur caractérisant l'amortissement visqueux. Pour le pendule élastique $\lambda = \alpha/2m$ avec α le coefficient de frottement visqueux.
- Solution de la forme : $x(t) = Ae^{rt}$
- Équation caractéristique : r vérifie l'équation du second degré :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2 = 0$$

- Discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_o^2)$

Selon la valeur du discriminant, il y a trois régimes à distinguer :

$\Delta < 0$: Régime pseudopériodique	$\Delta = 0$: Régime critique	$\Delta > 0$: Régime apériodique
Amortissement faible	Amortissement critique	Amortissement fort
$x = x_+ + x_-$ $x_+ = A_+ e^{-\lambda t} e^{it\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$ $x_- = A_- e^{-\lambda t} e^{-it\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$	$x(t) = (At + B)e^{-\omega_o t}$	$x = x_+ + x_-$ $x_+ = A_+ e^{-\lambda t} e^{it\sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}}$ $x_- = A_- e^{-\lambda t} e^{-it\sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}}$



La solution pour le régime pseudo périodique peut s'écrire :

$$x(t) = X_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega_o t + \varphi) \text{ ou } x(t) = e^{-\lambda t} [X_o \cos \Omega t + Y_o \sin \Omega t]$$

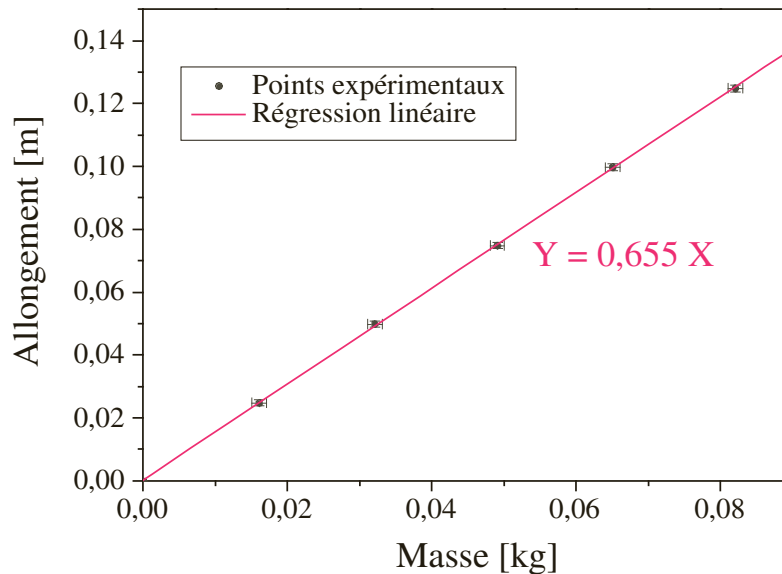
Ces trois régimes sont des régimes transitoires : au bout d'une durée relativement brève l'oscillateur retrouve sa position d'équilibre.

EXERCICES

4.1 Oscillations libres

Soit un ressort vertical de constante de raideur k inconnue et de longueur à vide $l_o = 5$ cm.

a) Un étudiant cherche à déterminer expérimentalement la valeur de la constante k . Pour cela, il trace l'allongement du ressort en fonction de la valeur de la masse m qu'il a accrochée au ressort et obtient le résultat illustré par la figure ci-dessous. Une régression linéaire donne un coefficient directeur de 0,655. En déduire la valeur de la constante de raideur k .



Courbe expérimentale et modélisation de l'allongement du ressort en fonction de la masse qui y est accrochée.

b) On accroche maintenant à ce ressort une masse $m = 75$ g, on écarte la masse de sa position d'équilibre d'une grandeur $z_o = 4$ cm et on la lâche sans vitesse initiale. En considérant que le mouvement a lieu sans frottement, déterminer l'équation du mouvement $z = f(t)$ et donner la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre 3 s après qu'on l'ait lâchée.

Réponses : **a)** $k = 15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; **b)** $z(t = 3\text{s}) = 2,9 \text{ cm}$

4.2 Oscillations amorties

Le ressort de l'exercice 4.1 et la masse ($m = 75$ g) sont maintenant plongés dans un fluide. Lors du déplacement de la masse, le fluide exerce sur cette masse une force de frottement visqueux de la forme :

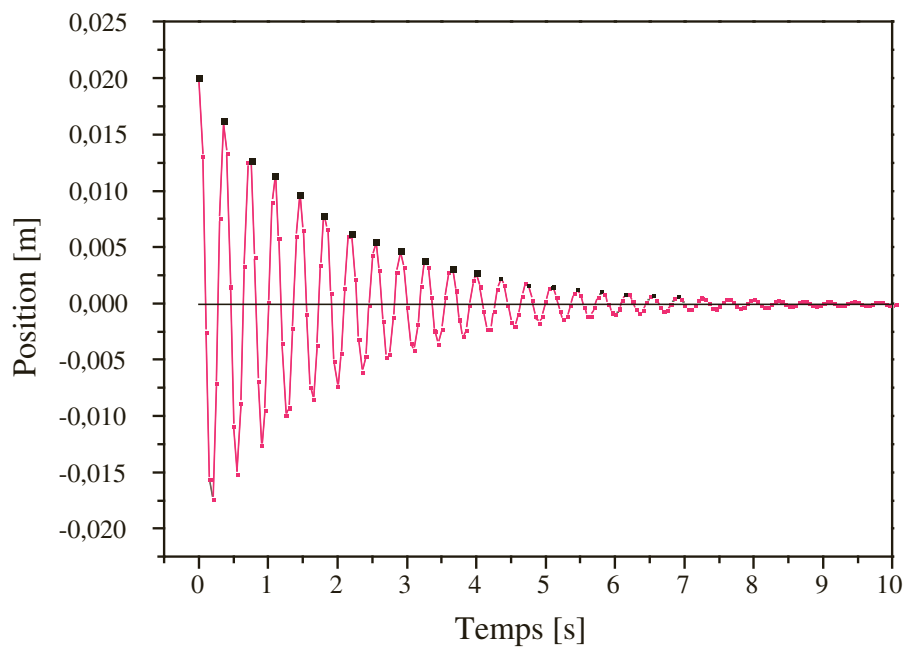
$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} \quad \text{où } v \text{ est la vitesse de la masse.}$$

1) Déterminer l'équation du mouvement $z = f(t)$ dans le cas où α est faible. On n'oubliera pas de déterminer les différentes constantes de cette équation.

2) Un enregistrement vidéo et un logiciel de capture ont permis de tracer la position de la masse m en fonction du temps (figure ci-dessous).

a) D'après le tracé obtenu, dans quel régime se trouve-t-on : apériodique, critique ou pseudo-périodique ?

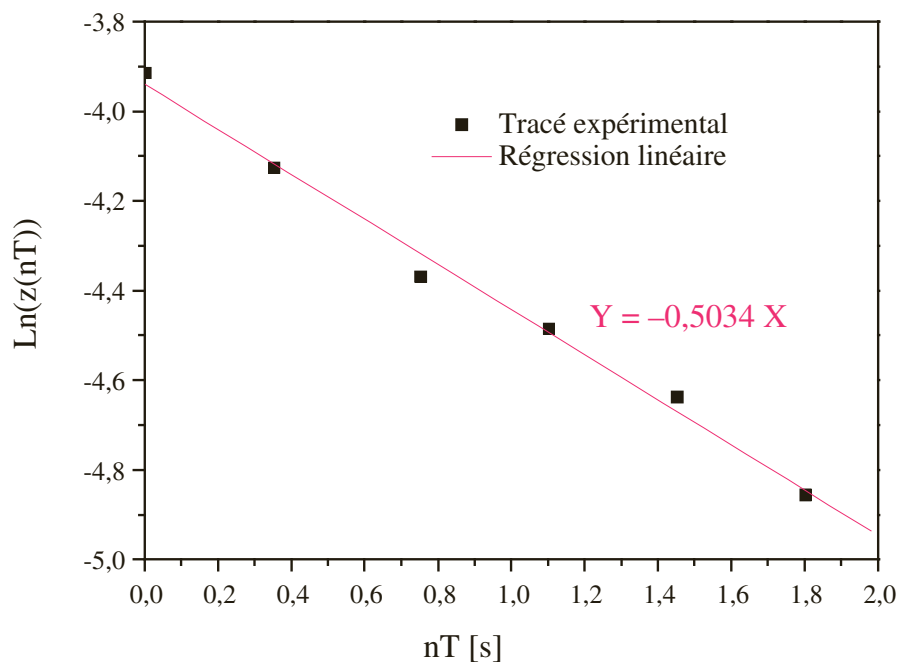
b) En déduire l'équation du mouvement de la masse m .



A) Courbe expérimentale obtenue *via* un enregistrement vidéo de la position de la masse m par rapport à sa position d'équilibre en fonction du temps.

c) Donner l'expression de $\ln(z(nT))$ en fonction de α , m , n et T où T est la pseudo-période et n un nombre entier.

d) Comme le montre la figure B, le tracé expérimental de $\ln(z(nT))$ en fonction de nT (correspondant aux positions marquées par les carrés pleins sur la figure A) donne une droite de pente $-0,5034$. En déduire la valeur de α .



B) Courbe expérimentale de $\ln(z(nT))$ en fonction de nT .

Réponses : **a)** pseudo-périodique ; **b)** $\alpha = 0,075 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

4.3 Système oscillant à deux ressorts

Soit une masse m , attachée de chaque côté à deux ressorts de raideur respective k_1 et k_2 et de longueur à vide l_{1o} et l_{2o} , se déplaçant sans frottement suivant une direction horizontale $x'x$ (figure ci-dessous). À l'équilibre, les ressorts ont respectivement une longueur l_{1e} et l_{2e} . L'origine O du repère Ox correspond à la position d'équilibre de la masse.

a) On écarte la masse m de sa position d'équilibre d'une grandeur x_o et on la lâche sans vitesse initiale. Donner l'équation du mouvement $x = f(t)$.

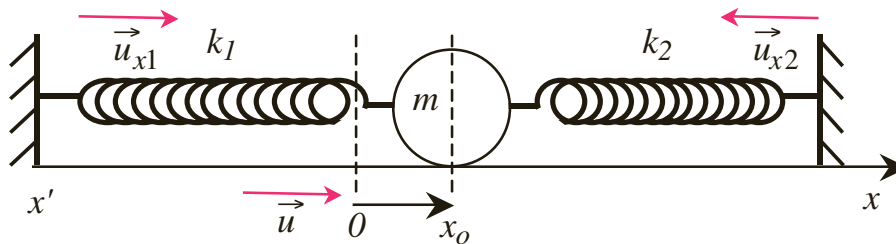


Schéma représentant la masse m et les deux ressorts lorsque la masse est écarté de la distance x_o par rapport à sa position d'équilibre.

b) Donner la constante de raideur k du ressort qui, attaché à la masse m , conduirait à la même équation du mouvement.

Réponse : b) $k = k_1 + k_2$

SOLUTIONS

4.1 a) Système : masse

Référentiel : terrestre galiléen

Repère : voir figure

Forces appliquées : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}$ de la masse et la tension exercée par le ressort $\vec{T} = -k\Delta l\vec{u}$ où Δl est l'allongement du ressort.

Principe fondamental de la dynamique :

On est à l'équilibre (pas de mouvement) d'où, avec

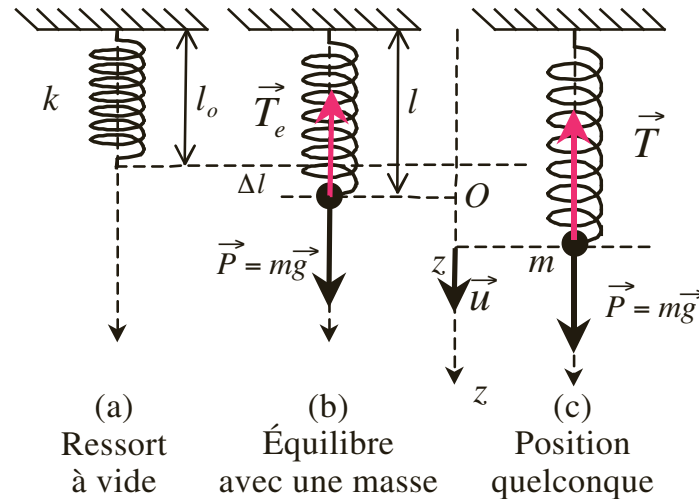
$$\vec{T} = \vec{T}_e = -k(l - l_o)\vec{u} :$$

$$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0}$$

En projetant cette relation sur l'axe vertical descendant Oz (voir figure suivante) on obtient :

$$0 = mg - k(l - l_o) = mg - k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

avec Δl l'allongement du ressort.



La pente de la droite $\Delta l = f(m)$ est donc égale à g/k .

On en déduit la valeur de k expérimentale :

$$\frac{g}{k} = 0,665 \Rightarrow k = \frac{9,81}{0,665} = 15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Si on projette le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz descendant on obtient :

$$m\ddot{z} = mg - k[z + (l - l_o)] = mg - k\Delta l - kz$$

Or on a vu qu'à l'équilibre : $mg - k\Delta l = 0$ donc :

$$m\ddot{z} + kz = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre sans second membre est de la forme :

$z = z_m \cos(\omega t + \varphi)$ où z_m et φ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et $\omega_o = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

Détermination des constantes :

À $t = 0$, $z = z_o$ et $v = 0$:

$$\dot{z} = -z_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) \Rightarrow \dot{z}(0) = -z_m \omega_o \sin \varphi = 0$$

$$z = z_m \cos(\omega_o t + \varphi) \Rightarrow z(0) = z_m \cos \varphi = z_o$$

On obtient donc alors : $\varphi = 0$ et $z_m = z_o$

Donc l'équation du mouvement de la masse m est :

$$z = z_o \cos \omega_o t$$

avec $z_o = 4 \text{ cm}$ et $\omega_o = \sqrt{k/m} = \sqrt{15/0,075} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Au bout de $t = 3 \text{ s}$ on aura $z = 4 \cos(30\sqrt{2}) = 2,95 \text{ cm}$

4.2 1) Système : masse

Référentiel terrestre galiléen

Repère : voir figure

Forces appliquées : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}$ de la masse, la tension exercée par le ressort $\vec{T} = -k\Delta l\vec{u}$ où Δl est l'allongement du ressort et la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

À l'équilibre on a : $\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0}$ ($\vec{f} = -\alpha\vec{v} = \vec{0}$)

D'où en projetant cette relation sur l'axe Oz on obtient :

$$0 = mg - k(l - l_o)$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}$$

En projetant cette relation sur l'axe vertical descendant Oz on obtient :

$$m\ddot{z} = mg - k[z + (l - l_o)] - \alpha\dot{z} = mg - k(l - l_o) - kz - \alpha\dot{z}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre on obtient :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

En posant $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ (facteur d'amortissement) on obtient l'équation différentielle du second ordre sans second membre suivante :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2 z = 0 \quad (1)$$

avec $\omega_o = \sqrt{k/m}$ la pulsation de l'oscillateur harmonique non amorti (cf. exercice 4.1).

La solution de cette équation est de la forme $z = A \exp(rt)$. En réintroduisant cette expression et celle de ses dérivées dans l'équation (1) on obtient :

$$Ar^2 e^{rt} + 2\lambda A r e^{rt} + \omega_o^2 A e^{rt} = 0 \Rightarrow A e^{rt} (r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2) = 0$$

Ainsi résoudre l'équation différentielle (1) revient à résoudre le polynôme du second degré : $r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2 = 0$ (2)

Pour cela on calcule le discriminant : $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_o^2 = 4(\lambda^2 - \omega_o^2)$

Trois cas peuvent alors être envisagés en fonction de la valeur de λ et conduisent à des solutions différentes. Ici on s'intéresse au cas de l'amortissement faible (α petit c'est-à-dire $\lambda < \omega_o$), ce qui est équivalent à dire que $\Delta < 0$.

Dans ce cas le polynôme (2) admet deux racines complexes de la forme :

$$r_{\pm} = \frac{-2\lambda \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\lambda \pm i\sqrt{\frac{-\Delta}{4}} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} \text{ (avec } i^2 = -1)$$

La solution de l'équation différentielle (1) est alors de la forme :

$$z = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t) \Rightarrow z = Z_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

avec Z_m et φ deux constantes dont les valeurs peuvent être déduites des conditions initiales et $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$ (la pseudo-pulsation).

2)a) D'après le tracé, on se trouve dans un régime pseudo périodique (amortissement faible). En effet, on remarque que l'amplitude des oscillations diminue lentement avec le temps jusqu'à arrêt complet.

b) D'après la question précédente :

$$z = Z_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

c) La pseudo période est définie par : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$

$$\begin{aligned} z(nT) &= Z_m e^{-n\lambda T} \cos[\omega(nT) + \varphi] = Z_m e^{-n\lambda T} \cos(2\pi n + \varphi) \\ &= Z_m e^{-n\lambda T} \cos \varphi \end{aligned}$$

avec $\lambda = \alpha/2m$

$$\ln[z(nT)] = \ln[Z_m e^{-n\lambda T} \cos \varphi] = \ln(Z_m \cos \varphi) + \ln e^{-n\lambda T} = K - n\lambda T$$

avec $K = \ln(Z_m \cos \varphi)$ est une constante. On obtient donc une droite de pente $-\lambda = -\alpha/2m$

d) On a donc : $\lambda = 0,5034$ c'est-à-dire $\alpha = 2m\lambda = 2 \cdot 0,075 \cdot 0,55034$

On en déduit donc que $\alpha = 0,075 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

4.3 a) Système : masse

Référentiel terrestre galiléen

Forces le poids $\vec{P}$ (vertical vers le bas), la réaction normale $\vec{R}_n$ du support qui compense le poids (pas de frottement), la tension $\vec{T}_1$ du ressort k_1 et la tension $\vec{T}_2$ du ressort k_2 . Avec les vecteurs unitaires définis sur la figure de l'énoncé, on peut écrire par définition :

$$\vec{T}_1 = -k_1(l_1 - l_{1o})\vec{u}_{x1} = -k_1(l_1 - l_{1o})\vec{u} = T_1\vec{u}$$

$$\vec{T}_2 = -k_2(l_2 - l_{2o})\vec{u}_{x2} = k_2(l_2 - l_{2o})\vec{u} = T_2\vec{u}$$

Principe fondamental de la dynamique : à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

En projetant on a : $-P + R_n = 0$ et $T_{1e} + T_{2n} = 0$

$$k_2(l_{2e} - l_{2o}) - k_1(l_{1e} - l_{1o}) = 0 \Rightarrow k_2\Delta l_2 = k_1\Delta l_1$$

Principe fondamental de la dynamique : tout instant t :

$$m\ddot{x} = -k_1[\Delta l_1 + x] + k_2[\Delta l_2 - x] = -(k_1 + k_2)x + k_2\Delta l_2 - k_1\Delta l_1$$

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dont la solution est de la forme :

$x = X_m \cos(\omega_o t + \varphi)$ où Z_m et φ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et $\omega_o = \sqrt{k/m} = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

Avec les conditions $t = 0$, $x = x_o$ et $v = 0$:

$$\dot{x} = -X_m \omega_o (\omega_o t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(0) = -X_m \omega_o \sin \varphi = 0$$

$$x = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \Rightarrow x(0) = X_m \cos \varphi = x_o$$

On obtient donc alors : $\varphi = 0$ et $X_m = x_o$

Finalement le mouvement de m est : $x = x_o \cos \omega_o t$ avec

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

b) D'après le résultat précédent on a $k = k_1 + k_2$

CHAPITRE 5

Oscillateurs mécaniques forcés

PLAN	5.1 Oscillations forcées 5.2 Étude de l'élongation 5.3 Étude de la vitesse 5.4 Aspect énergétique 5.5 Récapitulatif
OBJECTIFS	➤ Comprendre qu'un oscillateur peut en étant excité et sous certaines conditions d'amortissement entrer en résonance. ➤ Savoir utiliser la notation complexe pour la résolution du problème de l'oscillateur forcé (la notation complexe est primordiale). ➤ Assimiler la notion de résonance en mécanique en faisant la différence entre l'évolution de l'amplitude et celle de la vitesse en fonction de la fréquence ou pulsation.

5.1 OSCILLATIONS FORCÉES

a) Introduction

L'étude qui a été effectuée jusqu'à présent concernait le comportement d'un oscillateur amorti ou pas lorsqu'il se trouvait libre d'évoluer. Dans le cas du faible amortissement, le système oscille avec une période déterminée par les caractéristiques de l'oscillateur. On parle alors d'*oscillations libres*.

L'amortissement des oscillations est un phénomène inéluctable et on est parfois amené à y remédier. Il importe parfois d'entretenir les oscillations d'un oscillateur comme par exemple celles d'une horloge à balancier ou celle plus simplement d'une balançoire. On apporte alors juste l'énergie nécessaire pour compenser la perte : l'oscillateur continue à osciller avec la même période fixée par le système. Les *oscillations* sont dites *entretenu*es.

Dans cette partie nous allons nous intéresser au comportement de l'oscillateur lorsqu'il est forcé à osciller à une fréquence qui peut être

différente de celle avec laquelle il oscille librement. C'est le cas par exemple d'une membrane de haut-parleur qu'on force à osciller sous l'action d'une différence de potentiel de fréquence déterminée. Nous allons montrer que sous certaines conditions, l'amplitude des oscillations peut devenir très importante : le système entre en résonance. Les conséquences peuvent être graves.

On peut citer deux cas connus :

- Le 18 avril 1850 à Angers, un régiment traversant au pas cadencé un pont suspendu enjambant le Maine provoqua sa destruction.
- Le 7 novembre 1940, six mois après son inauguration, le pont suspendu de Tacoma (Etats-Unis) était détruit par les effets des rafales de vent qui sans être particulièrement violentes ($60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) étaient régulières.

On peut encore donner l'exemple de pièces mécaniques dans une automobile qui peuvent vibrer lorsque le moteur tourne. Pour certains régimes les oscillations peuvent devenir suffisamment importantes pour occasionner des ruptures. Une bonne fixation des pièces et un moyen de bien amortir les vibrations évitent ces problèmes.

b) Équation différentielle du mouvement

Montage expérimental

Nous reprenons, pour cette étude, l'exemple du pendule élastique horizontale sachant que les résultats obtenus sont valables pour le pendule élastique vertical ou pour tout autre oscillateur.

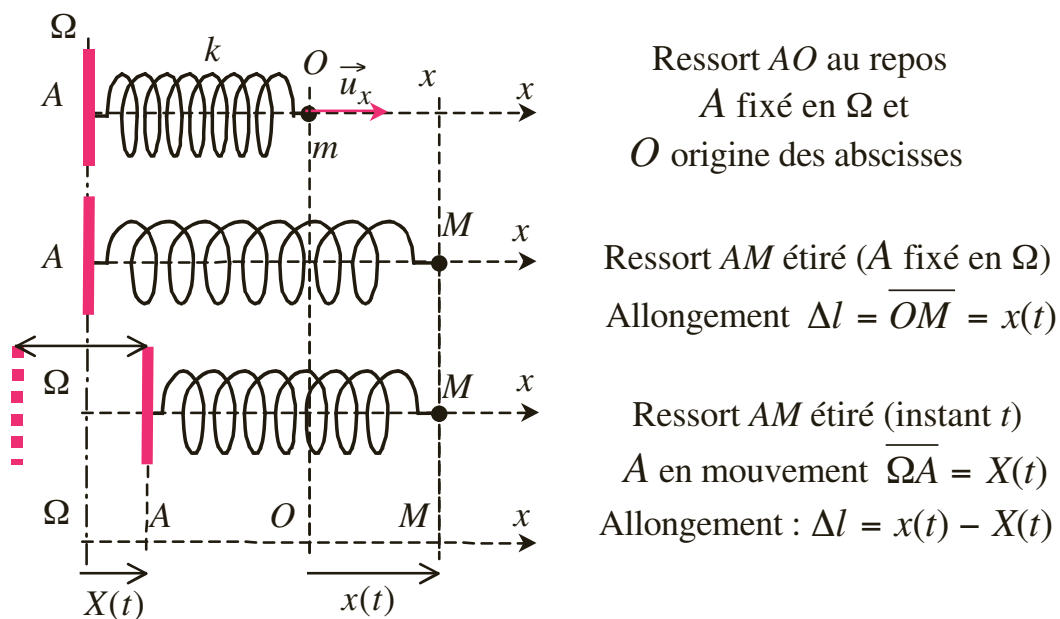


Figure 5.1 Représentation de l'allongement du ressort quand l'extrémité A du ressort est fixe puis en mouvement dans le référentiel terrestre.

L'extrémité fixe jusqu'à présent du ressort est maintenant relié à une lame susceptible de vibrer à différentes fréquences et qui va imposer un déplacement sinusoïdal $X(t)$ de cette extrémité noté A (voir *figure 5.1*) par rapport à la position initialement fixe Ω dans le référentiel terrestre. En notant e l'amplitude maximale du déplacement du point A fixé à la lame et ω la pulsation de la vibration on peut écrire :

$$\overline{\Omega A} = X(t) = e \cos \omega t \quad (5.1)$$

Lorsque l'extrémité A est fixe, nous avons vu au paragraphe 4.2.a) que l'allongement du ressort correspond simplement à l'abscisse $x(t)$ de la masse m située en M et repéré par rapport à sa position O lorsque le ressort est au repos.

L'allongement du ressort à l'instant t s'exprime algébriquement par :

$$\Delta l = \overline{AM} - \overline{\Omega O}$$

Lorsque l'extrémité A est en mouvement ($\overline{\Omega A} = X(t)$), on a :

$$\Delta l = \overline{AM} - \overline{\Omega O} = (\overline{A\Omega} + \overline{\Omega O} + \overline{OM}) - \overline{\Omega O}$$

$$\Delta l = \overline{A\Omega} + \overline{OM} = -X(t) + x(t)$$

La seule différence par rapport à l'étude des oscillations libres effectuée au paragraphe 4.2 est l'expression de cet allongement.

Équation différentielle

L'étude du mouvement de la masse m se fait toujours dans le référentiel terrestre galiléen. La masse m étant repérée par son abscisse $x(t)$ sa vitesse est donnée par la dérivée temporelle $\dot{x}(t)$ et son accélération par $\ddot{x}(t)$.

Les seules forces participant au mouvement de la masse suivant l'axe Ox sont :

- La tension du ressort à l'instant t qui s'écrit maintenant :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}_x = -k[x(t) - X(t)] \vec{u}_x$$

- L'expression de la force de frottement fluide est :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté suivant l'axe Ox permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$-k(x - X) - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kX$$

Le terme kX du second membre de l'équation différentielle est homogène à une force F qui s'écrit en tenant compte de (5.1) :

$$F(t) = kX(t) = ke\cos\omega t = F_o\cos\omega t \quad (5.2)$$

Le terme $F_o = ke$ représente l'amplitude maximale de la force F appelée force excitatrice.



Le résultat précédent est identique à celui obtenu en considérant l'extrémité A du ressort comme fixe et en ajoutant une force extérieure F agissant sur la masse. La figure 5.2 représente le système équivalent.

Dans ces conditions le bilan des forces fait intervenir, en projection sur l'axe Ox , trois forces : la tension $T = -kx$, les frottements fluides $f = -\alpha\dot{x}$ et la force excitatrice $F(t) = F_o\cos\omega t$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} -kx - \alpha\dot{x} + F &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx &= F \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cela correspond à l'équation différentielle de l'oscillateur libre auquel on applique une force excitatrice F .

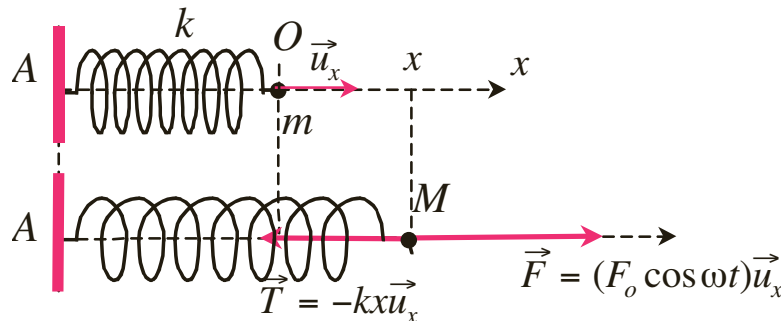


Figure 5.2 Pendule élastique excité par une force sinusoïdale. L'extrémité A est fixe, l'allongement du ressort correspond à l'abscisse $OM = x(t)$ et la masse subit une force extérieure F .

c) Solution de l'équation différentielle

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

- La solution générale de l'équation sans second membre (correspond au régime transitoire)
- Une solution particulière de l'équation avec second membre (correspond au régime permanent)

Le régime transitoire

Le premier terme correspond à la solution de l'équation différentielle de l'oscillateur libre qui a été étudié précédemment au paragraphe 4.2. Suivant l'importance de l'amortissement fluide, il existe trois régimes possible :

- le régime pseudo-périodique pour lequel l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement ;
- les régimes critique et apériodique pour lesquels il y a retour vers la position d'équilibre sans oscillations.

Dans les trois cas il y a toujours un retour à l'équilibre au bout d'un certain temps relativement bref. La solution $x(t)$ tend vers zéro.

La solution générale de l'équation sans second membre correspond donc à un régime transitoire (qui ne dure qu'un « certain temps »).

Le régime permanent : le régime forcé

Lorsque le régime transitoire a pratiquement disparu il ne reste plus que le second terme de la solution générale c'est-à-dire la solution particulière qui correspond alors au régime permanent (le régime qui subsiste). Le système adopte alors un mouvement de type sinusoïdal non pas à sa pulsation propre ω_o ou à une pulsation Ω caractéristique de l'amortissement mais avec la pulsation ω imposée par la force excitatrice. Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté φ . La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit dont :

$$x(t) = X_o \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.4)$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe (**voir annexe** : utilisation de la représentation complexe et rappel sur les complexes). La grandeur complexe associée à $x(t)$ s'écrit :

$$\underline{x}(t) = X_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{X}_o e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

avec l'amplitude complexe $\underline{X}_o = X_o e^{i\varphi}$

Déterminer les grandeurs $\underline{X}_o$ et φ revient à chercher le module et l'argument de l'amplitude complexe.

5.2 ÉTUDE DE L'ÉLONGATION

a) Expression de l'amplitude complexe

Le passage de la notation réelle à la notation complexe (voir annexe) permet d'écrire les correspondances rassemblées dans le *tableau 5.1* suivant :

TABLEAU 5.1

Notation réelle	Notation complexe
$F(t) = k e \cos \omega t = F_o \cos \omega t$	$\underline{F}(t) = F_o e^{i\omega t}$
$x(t) = X_o \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{x}(t) = X_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{X}_o e^{i\omega t}$
$\dot{x}(t) = -\omega X_o \sin(\omega t + \varphi)$	$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{X}_o e^{i\omega t} = i\omega \underline{x}(t)$
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X_o \cos(\omega t + \varphi)$	$\ddot{\underline{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{X}_o e^{i\omega t} = -\omega^2 \underline{x}(t)$

L'équation différentielle (5.3) devient en notation complexe :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \Rightarrow -m\omega^2 x + (i\omega)\alpha x + kx = F_o e^{i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + (i\omega)\alpha + k)\underline{X}_o e^{i\omega t} = F_o e^{i\omega t}$$

$$(k - m\omega^2 + i\omega\alpha)\underline{X}_o = F_o$$

On obtient finalement l'expression de l'amplitude complexe :

$$\underline{X}_o = \frac{F_o}{k - m\omega^2 + i\omega\alpha} \quad (5.6)$$

Il est intéressant de faire apparaître dans cette expression la pulsation propre $\omega_o = \sqrt{k/m}$ qui est une caractéristique de l'oscillateur et d'introduire le facteur $\lambda = \alpha/2m$ déjà utilisé précédemment. On a :

$$\underline{X}_o = \frac{F_o}{m\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + i\omega\frac{2m\alpha}{2m}} = \frac{F_o}{m} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega} \quad (5.7)$$

On peut remarquer que le terme F_o/m s'écrit aussi :

$$F_o = ke \Rightarrow \frac{F_o}{m} = \frac{ke}{m} = e\omega_o^2 \quad (5.8)$$

L'expression de l'amplitude complexe prend alors la forme suivante :

$$\underline{X}_o = \frac{e\omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega} = X_o e^{i\varphi} \quad (5.9)$$

avec : $\lambda = \alpha/2m$; $\omega_o = \sqrt{k/m}$; $F_o/m = e\omega_o^2$

b) Réponse de l'oscillateur en amplitude

L'amplitude X_o de l'oscillateur s'obtient en exprimant le module de l'amplitude complexe (voir annexe et encart A.1). On obtient :

$$X_o = |X_o| = \left| \frac{e\omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega} \right| = \frac{|e\omega_o^2|}{|(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega|}$$

$$X_o = \frac{e\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \quad (5.10)$$

L'oscillateur répond à l'excitation avec une amplitude $X_o = X_o(\omega)$ qui dépend de la pulsation ω imposée par la force excitatrice. La recherche d'un maximum éventuel de l'amplitude peut se faire en cherchant à minimiser le carré du dénominateur D^2 :

$$X_o(\omega) \text{ maximale} \Rightarrow D^2 = (\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2 \text{ minimale}$$

En posant $u = \omega^2$ ce dénominateur au carré s'écrit :

$$D^2 = (\omega_o^2 - u)^2 + 4\lambda^2 u \text{ minimale}$$

Pour minimiser cette fonction il suffit de chercher si la dérivée par rapport à la pulsation peut s'annuler. On a alors :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = \frac{dD^2}{du} \frac{du}{d\omega} = [-2(\omega_o^2 - u) + 4\lambda^2] \frac{du}{d\omega}$$

En remplaçant u par ω^2 et en remarquant que la dérivée de u par rapport à la pulsation ω vaut 2ω , l'expression précédente s'écrit :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = 4\omega[(\omega^2 - \omega_o^2) + 2\lambda^2] \quad (5.11)$$

Cette dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et si :

$$(\omega^2 - \omega_o^2) + 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_o^2 - 2\lambda^2 > 0$$

Cette solution n'est possible que si :

$$\omega_o^2 > 2\lambda^2 \Rightarrow \omega_o > \lambda\sqrt{2} \quad (5.12)$$

L'étude du signe de l'expression (5.11) montre que l'annulation de cette dérivée, s'il elle existe, correspond bien à un minimum pour le dénominateur D et donc à un maximum pour l'amplitude X_o .

La condition (5.12) peut s'écrire aussi :

$$\omega_o > \lambda\sqrt{2} \Leftrightarrow \omega_o > \frac{\alpha}{m\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha < \sqrt{2mk} \quad (5.13)$$

En introduisant le facteur de qualité $Q = \omega_o/2\lambda = m\omega_o/\alpha$ (voir la relation (4.47)) la même condition devient :

$$\omega_o > \frac{\alpha}{m\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{m\omega_o}{\alpha} = Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.14)$$

Cas de l'amortissement faible

Pour un amortissement suffisamment faible (condition 5.12) l'amplitude $X_o(\omega)$ passe par un maximum pour une pulsation ω_r appelée pulsation de résonance en amplitude et donnée par la relation :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} \quad (5.15)$$



Dans ce cas on a : $\omega_o > \lambda\sqrt{2} > \lambda$. La solution pour le régime transitoire correspond à un régime pseudo-périodique de pseudo-pulsation $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$. On a la relation :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} < \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} < \omega_o$$

On constate que plus l'amortissement est faible et plus cette pulsation de résonance s'approche de la pulsation propre. Avec $\lambda \ll \omega_o$ on a :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} = \omega_o \left(1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_o^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_o \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_o^2} \right) \approx \omega_o$$



Réciproquement, plus l'amortissement augmente et plus la pulsation ω_r diminue jusqu'à prendre la valeur nulle pour $\lambda = \omega_o/\sqrt{2}$.

L'amplitude maximale atteinte à la résonance est donnée par (5.10) en remplaçant la pulsation ω par ω_r (expression (5.15)). Cela donne :

$$X_o(\omega_r) = \frac{e\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - [\omega_o^2 - 2\lambda^2])^2 + 4\lambda^2(\omega_o^2 - 2\lambda^2)}}$$

$$X_o(\omega_r) = \frac{e\omega_o^2}{\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2\omega_o^2 - 8\lambda^4}} = \frac{e\omega_o^2}{2\lambda\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$$

Soit encore, avec : $\lambda = \alpha/2m$; $F_o/m = e\omega_o^2$ et $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$:

$$X_o(\omega_r) = \frac{e\omega_o^2}{2\lambda\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} = \frac{F_o}{\alpha\sqrt{\omega_o^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} = \frac{F_o}{\alpha\Omega} \quad (5.16)$$

La valeur de l'amplitude maximale obtenue pour $\omega = \omega_r$ dépend de l'amortissement. Pour un amortissement très faible on a :

$$X_o(\omega_r) = \frac{F_o}{\alpha\sqrt{\omega_o^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} \approx \frac{F_o}{\alpha\omega_o} \quad (5.17)$$

Cette amplitude peut s'exprimer en fonction du facteur de qualité Q . Sachant que $F_o = ke$ et que $k = m\omega_o^2$, on obtient :

$$X_o(\omega_r) = \frac{F_o}{\alpha\omega_o} = \frac{m\omega_o^2 e}{\alpha\omega_o} = \frac{m\omega_o}{\alpha} e = Qe \quad (5.18)$$

Ainsi, pour des valeurs du coefficient de frottement α très faibles ou un facteur de qualité élevé, cette amplitude peut devenir très importante. Par exemple, avec un facteur $Q = 100$, une excitation à la pulsation de résonance (proche de la pulsation propre) d'amplitude $e = 1$ cm provoquerait des déplacements d'amplitude 1 m pour l'oscillateur.

Les oscillations peuvent alors placer l'oscillateur en dehors de ses limites d'élasticité et provoquer sa destruction.

Cas de l'amortissement fort

Le phénomène de résonance en amplitude n'existe plus dès que l'amortissement devient suffisamment important c'est-à-dire :

$$\lambda > \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha > \frac{2m\omega_o}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha > \sqrt{2mk} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_o}{\alpha} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La figure 5.3 donne l'allure de la réponse en amplitude X_o en fonction de la pulsation ω de l'excitateur et pour trois valeurs différentes de l'amortissement. L'oscillateur est excité avec un vibreur dont les oscillations ont une amplitude de 2 cm. Les caractéristiques de l'oscillateur sont rappelées sur la figure.

Pour un facteur de qualité $Q_1 = 7$ correspondant à un coefficient de frottement $\alpha_1 = m\omega_o/Q_1 = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, on observe un pic important autour d'une pulsation ω_{r1} très proche de la pulsation propre ω_o : la résonance est dite aiguë. Pour une excitation d'amplitude $e = 2 \text{ cm}$, l'amplitude de la réponse est alors de 14 cm (ce qui correspond bien à $Q_1 e = 14 \text{ cm}$).

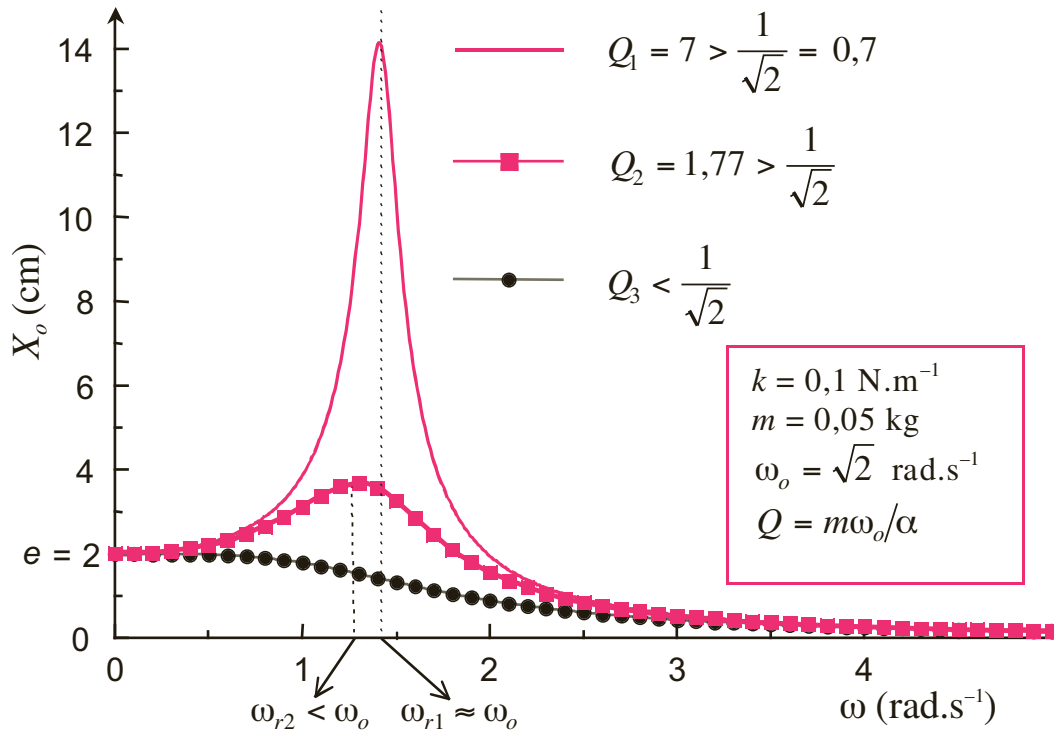


Figure 5.3 Réponse en amplitude d'un oscillateur en fonction de la pulsation pour trois valeurs de l'amortissement. Pour un amortissement suffisamment faible l'amplitude passe par un maximum pour une pulsation ω_r inférieure à la pulsation propre ω_o de l'oscillateur.

Pour un facteur de qualité plus faible $Q_2 = 1,77$ (soit $\alpha_2 = 4\alpha_1$) le phénomène de résonance existe toujours mais il est moins prononcé : on parle de résonance floue. Celle-ci a lieu pour une pulsation ω_{r2} inférieure à la pulsation propre. On obtient encore une amplitude voisine de $Q_2 e = 3,5 \text{ cm}$.

Enfin, pour un facteur de qualité $Q_3 < 1/\sqrt{2}$, il n'y a plus de maximum. L'amplitude X_o ne fait que décroître avec la pulsation. La réponse de l'oscillateur est donc très faible.

Ce résultat est important. En effet, si on désire éviter le phénomène de résonance, il faudra s'arranger pour avoir un facteur de qualité suffisamment petit. C'est ce qui est réalisé par exemple pour les amor-

tisseurs d'une automobile excités par les inégalités de la routes (ceci pour le confort des passagers).



L'expression (5.10) de l'amplitude X_o pour une pulsation nulle donne :

$$X_o = \frac{e\omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} = \frac{e\omega_o^2}{\sqrt{\omega_o^4}} = e$$

Le cas limite $\omega = 0$ correspond au cas où on tire sur le ressort avec une force constante $F_o = ke = \text{constante}$. L'allongement du ressort correspondant est donc $\Delta l = e$. On retrouve bien le même résultat.

De plus, la valeur $\omega = 0$ correspond aussi à un extremum (voir la dérivée 5.11). la tangente à l'origine est donc horizontale.

c) Réponse en phase de l'oscillateur

La phase φ de l'oscillateur s'obtient en exprimant l'argument de l'amplitude complexe (voir encart 4.1). On obtient :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg \underline{X_o} = \arg \left(\frac{e\omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega} \right) \\ \varphi &= \arg(e\omega_o^2) - \arg((\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega) \\ \varphi &= 0 - \arg((\omega_o^2 - \omega^2) + i2\lambda\omega)\end{aligned}$$

On en déduit (voir annexe et encart A.1) :

$$\sin \varphi = -\frac{2\lambda\omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \quad (5.19)$$

$$\cos \varphi = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \quad (5.20)$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad (5.21)$$

Le sinus est toujours négatif, la phase varie donc entre 0 et $(-\pi)$. La phase φ représentant le déphasage de l'oscillateur par rapport à l'excitateur, on constate que la réponse de l'oscillateur est en retard par rapport à l'excitateur.

La figure 5.4 donne l'allure de la phase φ de la réponse de l'oscillateur pour trois amortissements différents.

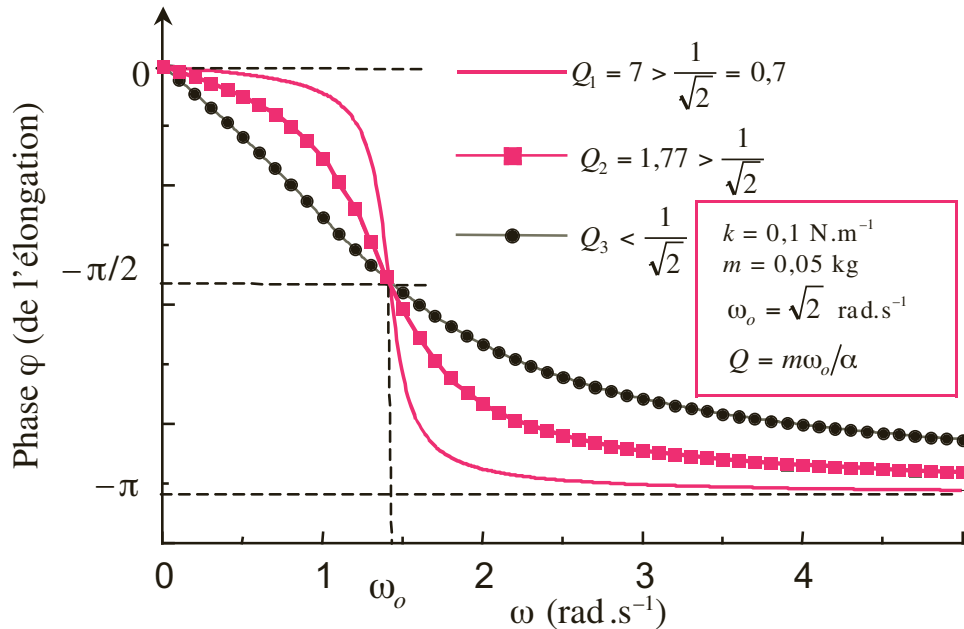


Figure 5.4 Réponse en phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation pour trois valeurs de l'amortissement. Aux basses fréquences l'oscillateur est en phase avec l'excitateur et en opposition pour les fréquences élevées.

Pour des fréquences faibles de l'excitateur ($\omega \ll \omega_0$), l'oscillateur suit le mouvement et vibre en phase avec l'excitateur ($\varphi \approx 0$) : les extrémités A et M du ressort (voir figure 5.1) se déplacent dans le même sens.

Pour des fréquences élevées, l'oscillateur se trouve en opposition de phase ($\varphi \approx -\pi$) avec l'excitateur : les extrémités A et M du ressort (voir figure 5.1) se déplacent en sens opposé.



Pour une pulsation égale à la pulsation propre et quelque soit l'amortissement, on a : l'oscillateur est en quadrature retard par rapport à l'excitateur. Pour les amortissements faibles, la pulsation de résonance étant proche de la pulsation propre on obtient le même résultat.



La variation plus ou moins rapide de la phase dépend de l'amortissement : variation brusque au voisinage de la résonance pour les faibles amortissements et variation lente et progressive pour les forts amortissements.

5.3 ÉTUDE DE LA VITESSE

a) Expression de la vitesse complexe

L'expression de la vitesse complexe s'obtient simplement à partir de l'amplitude (voir *tableau 5.1*). On a :

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \Rightarrow \underline{V}_o e^{i\omega t} = i\omega \underline{X}_o e^{i\omega t}$$

Avec $i = \exp(i\pi/2)$ (voir annexe et encart A.1) on a :

$$\underline{V}_o = i\omega \underline{X}_o \Rightarrow \underline{V}_o = \omega \underline{X}_o e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$V_o e^{i\phi} = \omega X_o e^{i\varphi} e^{i\frac{\pi}{2}} = \omega X_o e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

L'amplitude V_o de la vitesse et sa phase correspondent au module et à l'argument de la vitesse complexe soit :

$$V_o = |\underline{V}_o| = \omega X_o \text{ et } \phi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (5.22)$$

La vitesse est en quadrature avance (déphasage de $\pi/2$) par rapport à l'amplitude.

b) Résonance de vitesse

En reprenant l'expression (4.10) de l'amplitude X_o , on obtient :

$$V_o = \omega X_o = \frac{\omega e \omega_o^2}{\sqrt{(\omega_o^2 - 2\lambda^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$$

Sachant que $F_o/m = e\omega_o^2$ on obtient en divisant numérateur et dénominateur par la pulsation ω :

$$V_o = \frac{\omega F_o}{m\omega \sqrt{\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + (2\lambda)^2}} = \frac{F_o}{\sqrt{m^2 \left(\frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + m^2 (2\lambda)^2}}$$

En fonction du coefficient de frottement $\alpha = 2\lambda m$ L'expression est :

$$V_o = \frac{F_o}{\sqrt{\alpha^2 + m^2 \left(\frac{\omega_o^2}{\omega} - \omega\right)^2}} \quad (5.23)$$

L'amplitude de la vitesse dépend de la pulsation (ou fréquence). Il est facile de voir que cette amplitude admet un maximum. En effet le dénominateur se présente comme la somme de deux termes positifs dont l'un entre parenthèse peut s'annuler. Le dénominateur sera donc minimal lorsque ce dernier terme s'annulera :

$$V_o \text{ maximale} \Rightarrow \alpha^2 + m^2 \left(\frac{\omega_o^2}{\omega} - \omega \right)^2 \min \Rightarrow \frac{\omega_o^2}{\omega} - \omega = 0$$

$$V_o \text{ maximale} \Rightarrow \frac{\omega_o^2}{\omega_R} = \omega_R \Rightarrow \omega_R^2 = \omega_o^2 \quad (5.24)$$

On constate que quelque soit l'amortissement il y a toujours résonance de vitesse pour une pulsation ω_R égale à la pulsation propre ω_o de l'oscillateur. Dans ce cas, l'amplitude de la vitesse est maximale et vaut :

$$V_o(\omega_R) = V_o(\omega_o) = V_{o\max} = \frac{F_o}{\alpha} \quad (5.25)$$

La figure 5.5 représente l'évolution de l'amplitude de la vitesse avec la pulsation de l'excitateur pour le même oscillateur étudié précédemment et pour les mêmes amortissements.

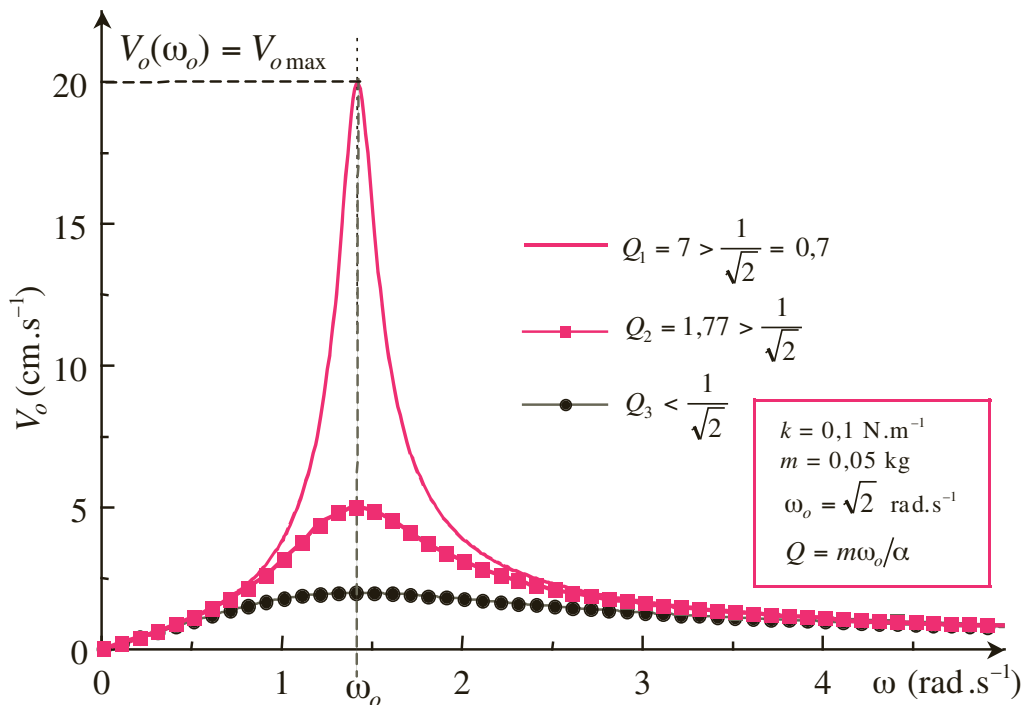


Figure 5.5 Amplitude de la vitesse du résonateur en fonction de la pulsation de l'excitateur pour différents amortissements. Il y a toujours résonance de vitesse pour une pulsation égale à la pulsation propre d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.

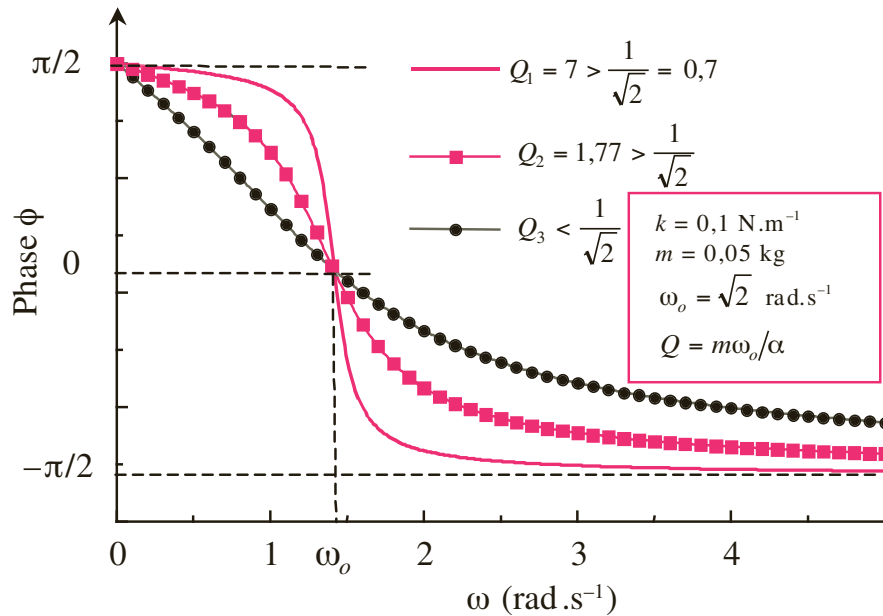


Figure 5.6 Évolution de la phase de la vitesse d'un oscillateur en fonction de la pulsation pour trois valeurs de l'amortissement. À la résonance, oscillateur et excitateur sont en phase.

Pour l'amortissement le plus faible ($Q_1 = 7$) on obtient à la résonance une amplitude de la vitesse de $20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. En effet, la force vaut $F_o = ke = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ et le coefficient d'amortissement est $\alpha_1 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$: le rapport $F_o/\alpha = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans ce cas la résonance est aiguë.

Pour Q_2 quatre fois plus petit que Q_1 , on obtient à la résonance une amplitude de la vitesse de l'ordre de $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ c'est-à-dire 4 fois plus petite que celle obtenue avec Q_1 .

Pour un amortissement plus important, il y a toujours résonance mais elle est moins prononcée et correspond à une résonance floue.

La *figure 5.6* représente la phase de la vitesse par rapport à l'excitateur. C'est tout simplement la même représentation que pour la phase de l'élongation (*figure 5.4*) translatée de $\pi/2$.

Lorsqu'il y a résonance de vitesse la phase ϕ est nulle : vitesse et excitateur sont en phase. Pour les basses fréquences, la vitesse est en avance de phase (phase positive). Pour les fréquences élevées, elle est en retard (phase négative).

c) Impédance mécanique

La vitesse complexe peut être obtenue directement à partir de l'équation différentielle de l'oscillateur :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_o e^{i\omega t}$$

En utilisant le *tableau 5.1*, on peut exprimer accélération et élongation en fonction de la vitesse complexe. On obtient :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{V}_o e^{i\omega t} = V_o e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\underline{x}} = \frac{d\dot{\underline{x}}}{dt} = i\omega \dot{\underline{x}}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \Rightarrow \underline{x} = \frac{\dot{\underline{x}}}{i\omega} = \frac{i\dot{\underline{x}}}{i^2\omega} = -i \frac{\dot{\underline{x}}}{\omega}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$m(i\omega \underline{V}_o) e^{i\omega t} + \alpha \underline{V}_o e^{i\omega t} + \frac{k}{i\omega} \underline{V}_o e^{i\omega t} = F_o e^{i\omega t}$$

$$\left(i\omega m + \alpha - i\frac{k}{\omega}\right) \underline{V}_o e^{i\omega t} = F_o e^{i\omega t}$$

$$\underline{V}_o = \frac{F_o}{\alpha + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

$$\underline{V}_o = \frac{F_o}{\alpha + im\left(\omega - \frac{k}{m\omega}\right)} = \frac{F_o}{\alpha + im\left(\omega - \frac{\omega_o^2}{\omega}\right)} \quad (5.26)$$

Le module de cette expression redonne bien l'expression (5.23) de l'amplitude V_o de la vitesse.

Par analogie avec l'électricité, il est pratique d'introduire la notion d'impédance mécanique Z définie par :

$$F_o = Z(\omega) V_o \quad (5.27)$$

À partir de l'expression (5.26) de la vitesse complexe, on peut donner l'expression suivante de l'impédance complexe :

$$\underline{F} = \underline{Z} \underline{v} \Rightarrow F_o = \underline{Z} \underline{V}_o$$

$$\underline{Z} = \frac{F_o}{\underline{V}_o} = \alpha + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad (5.28)$$

Le passage aux modules (voir annexe et encart A.1) donne :

$$|Z| = \left| \frac{F_o}{\underline{V}_o} \right| \Rightarrow Z = \frac{F_o}{V_o} = \sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} \quad (5.29)$$

À la résonance, la vitesse passe par un maximum ce qui impose à l'impédance mécanique d'être minimale ce qui est réalisé pour :

$$Z \min \Rightarrow \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) = 0 \Rightarrow \omega_R^2 = \frac{k}{m} = \omega_o^2$$

L'impédance à la résonance prend la valeur simple :

$$\boxed{\omega = \omega_o \Rightarrow Z(\omega_o) = \alpha} \quad (5.30)$$

Le passage aux arguments donne :

$$\arg \underline{Z} = \arg F_o - \arg \underline{V_o} \Rightarrow \arg \left(\alpha + i \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right) = -\phi$$

De cette égalité on en tire :

$$\tan \phi = \tan[-\arg \underline{Z}] = -\tan[\arg \underline{Z}] = -\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha} \quad (5.31)$$

$$\cos \phi = \cos[-\arg \underline{Z}] = \cos[\arg \underline{Z}]$$

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}} = \frac{\alpha}{\underline{Z}} \quad (5.32)$$

5.4 ASPECT ÉNERGÉTIQUE

a) Transfert de puissance

La puissance fournie par la force excitatrice est donnée par :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = (F_o \cos \omega t)(V_o \cos(\omega t + \phi)) \quad (5.33)$$



Pour faire ce type de calcul il est important de bien considérer les parties réelles des quantités complexes. En effet la partie réelle d'un produit de deux nombres complexes n'est pas égale au produit des parties réelles de ces deux nombres. C'est cette dernière quantité qui nous intéresse dans ce calcul.

Cette expression (5.33) peut se transformer en utilisant la définition (5.28) de l'impédance ($F_o = ZV_o$) ainsi que l'identité suivante :

$$2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

On a alors :

$$\mathcal{P}(t) = F_o V_o \frac{[\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi]}{2} = \frac{ZV_o^2}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi]$$

avec $Z = \sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$

La puissance moyenne fournie par la force excitatrice se calcule en prenant la valeur moyenne de la puissance sur une période T ce qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P}(t) \rangle_T = \frac{ZV_o^2}{2} \langle \cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi \rangle_T$$

$$\mathcal{P}_m = \frac{ZV_o^2}{2} [\langle \cos(2\omega t + \phi) \rangle_T + \langle \cos\phi \rangle_T]$$

Le terme $\langle \cos(2\omega t + \phi) \rangle_T$ qui correspond à la valeur moyenne d'un cosinus sur deux périodes est nulle. La valeur moyenne d'une constante étant la constante elle-même on obtient :

$$\mathcal{P}_m = \frac{ZV_o^2}{2} \cos\phi = \frac{F_o V_o}{2} \cos\phi$$

Enfin, avec $Z\cos\phi = \alpha$ (voir 5.32) la puissance moyenne s'écrit :

$$\mathcal{P}_m(\omega) = \alpha \frac{V_o^2(\omega)}{2} \quad (5.34)$$

Cette puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ dépend de la pulsation ω et est maximale lorsque l'amplitude de la vitesse est maximale c'est-à-dire à la résonance pour $\omega = \omega_R = \omega_o$. On a alors :

$$\mathcal{P}_m(\omega_o) = \alpha \frac{V_o^2(\omega_o)}{2} = \frac{\alpha}{2} V_{o\max}^2 \quad (5.35)$$

Avec le résultat (5.25) on a :

$$\mathcal{P}_m(\omega_o) = \alpha \frac{V_o^2(\omega_o)}{2} = \frac{\alpha F_o^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{2} \frac{F_o^2}{\alpha} \quad (5.36)$$

La résonance mécanique est définie par la valeur de la pulsation qui permet le transfert maximal de puissance entre l'excitateur et le résonateur. La résonance se produit donc lorsqu'il y a résonance de vitesse c'est-à-dire pour $\omega = \omega_R = \omega_o$. Nous avons vu que pour un amortissement suffisamment faible, l'amplitude de l'élongation passe par un maximum pour une pulsation $\omega = \omega_r \approx \omega_o$. On peut donc dire qu'il y a aussi résonance en amplitude. Pour des amortissements plus importants il n'y a plus de résonance en amplitude mais il y a toujours la résonance en vitesse (plus ou moins aiguë ou floue suivant l'amortissement).



La puissance développée par la force de frottement s'écrit :

$$\mathcal{P}_f(t) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha V_o^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Le calcul de la puissance moyenne de la force de frottement donne :

$$\mathcal{P}_{fm} = \langle \mathcal{P}_f(t) \rangle_T = -\alpha V_o^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle_T$$

Sachant que la valeur moyenne d'un cosinus au carré est égale à 1/2 on a :

$$\mathcal{P}_{fm} = \frac{\alpha V_o^2}{2}$$

On vérifie ainsi que la puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ fournie par la force excitatrice compense la puissance moyenne $\mathcal{P}_{fm}$ développée par la force de frottement :

$$\mathcal{P}_{fm} + \mathcal{P}_m = 0$$

b) Facteur de qualité et bande passante

D'après l'étude précédente l'oscillateur répond bien lorsque la fréquence excitatrice est au voisinage de la fréquence propre. Pour des fréquences basses ou élevées la réponse est pratiquement nulle.



On peut considérer que l'oscillateur répond bien tant que la puissance transférée par l'excitateur est supérieure ou égale à la moitié de la puissance maximale à la résonance. Ce critère permet de définir les deux pulsations limites ω_1 et ω_2 caractérisant ce qu'on appelle la bande passante.

Définition de la bande passante en pulsation $\Delta\omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \\ \mathcal{P}_m(\omega_1) = \mathcal{P}_m(\omega_2) = \frac{\mathcal{P}_m(\omega_o)}{2} \end{array} \right. \quad (5.37)$$

La relation permettant de calculer les pulsations ω_1 et ω_2 est plus souvent donnée en fonction de l'amplitude de la vitesse V_o . En utilisant l'expression (5.35) on a :

$$\mathcal{P}_m(\omega_1) = \mathcal{P}_m(\omega_2) = \frac{\mathcal{P}_m(\omega_o)}{2} \Leftrightarrow V_o(\omega_1) = V_o(\omega_2) = \frac{V_o(\omega_o)}{\sqrt{2}} \quad (5.38)$$

Ces deux pulsations peuvent se déterminer graphiquement sur la courbe de résonance de vitesse. La *figure 5.7* montre la bande passante obtenue pour deux amortissements différents. À une réso-

nance aiguë correspond une bande passante « étroite », à une résonance floue une bande passante « large ».

Pour déterminer analytiquement ces deux pulsations il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$V_o^2(\omega) = \frac{V_o^2(\omega_o)}{2} \Leftrightarrow \frac{F_o^2}{Z^2(\omega)} = \frac{F_o^2}{2Z^2(\omega_o)}$$

En utilisant les expressions (5.29) de l'impédance mécanique et (5.30) de l'impédance à la résonance on obtient :

$$Z^2(\omega) = 2Z^2(\omega_o) \Leftrightarrow \alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 = 2\alpha^2$$

$$\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow m\omega - \frac{k}{\omega} = \pm\alpha$$

$$\omega - \frac{k}{m\omega} = \pm\frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \omega^2 - \omega_o^2 = \pm\frac{\alpha}{m}\omega$$

$$\omega^2 \mp \frac{\alpha}{m}\omega - \omega_o^2 = 0$$

On obtient donc deux équations du second degré c'est-à-dire les 4 solutions possibles suivantes :

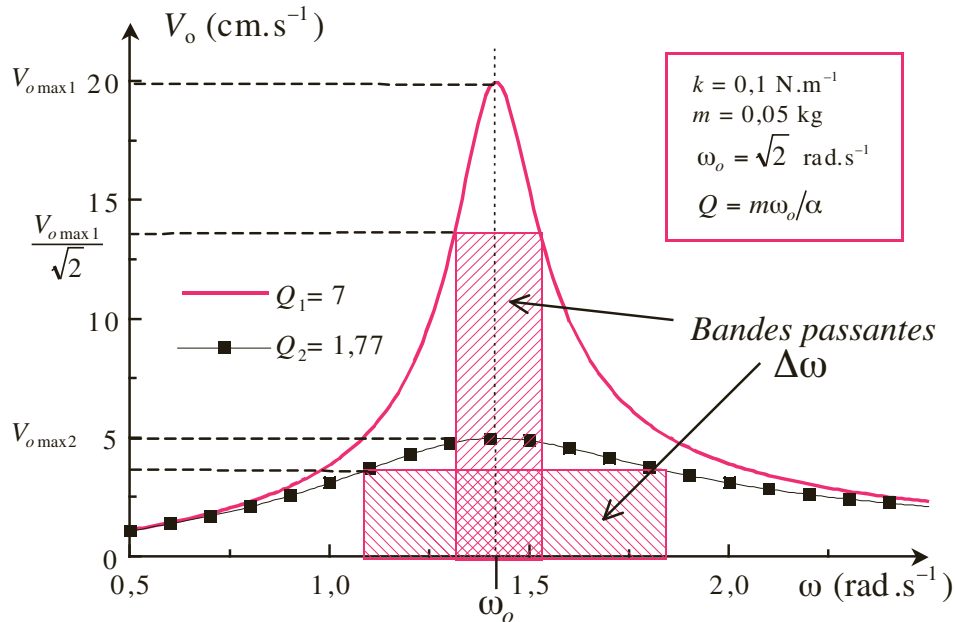


Figure 5.7 Bandes passantes en hachuré pour deux amortissements différents.

$$\omega = \pm \frac{\alpha}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} + 4\omega_o^2}$$

$$\omega = \pm \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \omega_o^2}$$

Les pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ recherchées sont des grandeurs réelles positives. Les seules possibilités sont donc :

$$\omega_1 = -\frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (5.39)$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (5.40)$$

La bande passante a donc pour expression :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\alpha}{m} \quad (5.41)$$

Il est pratique pour caractériser l'acuité de résonance du phénomène (résonance plus ou moins aiguë ou floue) de faire intervenir le rapport de la pulsation propre sur la largeur de la bande passante. On obtient le nombre sans dimension suivant :

$$\frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{m\omega_o}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_o} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = Q \quad (5.42)$$

Ce rapport correspond au facteur de qualité Q déjà défini au paragraphe 4.2 (voir 4.45) à partir d'une étude énergétique. Ce facteur correspond aussi au rapport de l'amplitude maximale de l'élongation sur l'amplitude e du vibreur (relation (5.18)).

Ainsi pour un facteur de qualité Q élevé la résonance sera aiguë et la bande passante étroite.

Avec les valeurs numériques de la *figure 5.7*, pour un facteur de qualité $Q_1 = 7$ on obtient $(\Delta\omega)_1 = \omega_o/7 = \sqrt{2}/7 \approx 0,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour un facteur Q_2 quatre fois plus petit, la bande passante est quatre fois plus grande c'est-à-dire $(\Delta\omega)_2 \approx 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ces résultats correspondent à ceux obtenus graphiquement.



POINTS CLEFS

► *Oscillateur forcé* (force excitatrice $F = F_o \cos \omega t$)

- Équation différentielle $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = \Gamma \cos \omega t$ avec $\Gamma = F_o/m$

- Notation complexe :

$$x(t) = X_o \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{x}(t) = X_o e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_o e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = V_o \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \dot{\underline{x}}(t) = V_o e^{i(\omega t + \phi)} = \underline{V}_o e^{i\omega t}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{X}_o e^{i\omega t} = \underline{V}_o e^{i\omega t}$$

$$\underline{X}_o = X_o e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{V}_o = V_o e^{i\phi}$$

► *Amplitude de l'élongation :*

- Solution complexe :

$$X_o = \frac{\Gamma}{\omega_o^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega}$$

- Module : $|\underline{X}_o| = X_o = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$

- Argument : $\arg \underline{X}_o = \varphi = -\arg[\omega_o^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega]$

$$\tan \varphi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Pour un faible amortissement $\lambda\sqrt{2} < \omega_o$, résonance en amplitude pour une pulsation $\omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} \leq \omega_o$. Pour un amortissement suffisamment faible on $\omega_r \approx \omega_o$; pas de résonance pour un amortissement important.

► *Amplitude de la vitesse :*

- Solution complexe :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \Rightarrow \ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_o^2 \underline{x} = \Gamma_o e^{i\omega t}$$

$$\left(i\omega + 2\lambda + \frac{\omega_o^2}{i\omega}\right) \underline{V}_o = \Gamma_o$$

- Module : $|\underline{V}_o| = V_o = \frac{\Gamma_o}{\sqrt{4\lambda^2 + \left(\omega - \frac{\omega_o^2}{\omega}\right)^2}}$

- Argument : $\arg \underline{V}_o = \phi = \varphi + \frac{\pi}{2} = -\arg \left[2\lambda + i \left(\omega - \frac{\omega_o^2}{\omega} \right) \right]$

$$\tan \phi = - \frac{\omega - \frac{\omega_o^2}{\omega}}{2\lambda}$$

- Impédance mécanique $Z : \underline{F} = \underline{Z}v(t) \Rightarrow |F_o| = Z|V_o|$
- Résonance en vitesse : pulsation de résonance $\omega_R = \omega_o$
 $\phi(\omega_o) = 0$ et $V_o(\omega_o) = F_o/2\lambda = F_o/\alpha$
- Impédance à la résonance : $Z(\omega_o) = \alpha$
- Bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ avec :

$$V_o(\omega_1) = V_o(\omega_2) = \frac{V_o(\omega_o)}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\lambda = \frac{\alpha}{m}$$

- Facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{m\omega_o}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_o} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$
- Facteur de qualité Q élevé : résonance aiguë

EXERCICES

Une application pratique des oscillations forcées : le microscope à force atomique.

Le microscope à force atomique (AFM) est une technique de caractérisation permettant d'imager des objets de taille nanométrique à l'aide d'une pointe fixée sur un micro-levier ayant une longueur de quelques centaines de micromètres.

Pour pouvoir imager les objets on fait osciller ce micro-levier et on le déplace sur la zone que l'on désire imager.

Pour optimiser la qualité de l'image il est nécessaire de comprendre son comportement mécanique. Ainsi, le micro-levier peut être assimilé à un ressort de raideur $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de masse m que l'on force à osciller en lui appliquant une force de la forme $F = F_o \cos \omega t$ dans un milieu où les amortissements (α) sont faibles. On supposera dans la suite de l'exercice que $F_o/m = A_o = 710,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1) Donner l'équation différentielle du mouvement du micro-levier ($z(t)$).

2) La solution de cette équation est la somme de deux termes : le premier terme qui correspond au régime transitoire est la solution de l'équation différentielle posée au 1) sans second membre. Le deuxième terme correspondant au régime permanent est de la forme $z = Z_o \cos(\omega t + \varphi)$.

Donner la forme de la solution correspondant au régime transitoire. On ne demande pas de calculer les constantes.

3) On suppose que le régime permanent est établi, c'est-à-dire que $z = Z_o \cos(\omega t + \varphi)$ et on néglige la solution correspondant au régime transitoire.

a) Réécrire l'équation différentielle obtenue au 1), en utilisant la représentation complexe, c'est-à-dire en posant $z = \text{Re}(\underline{z})$ avec

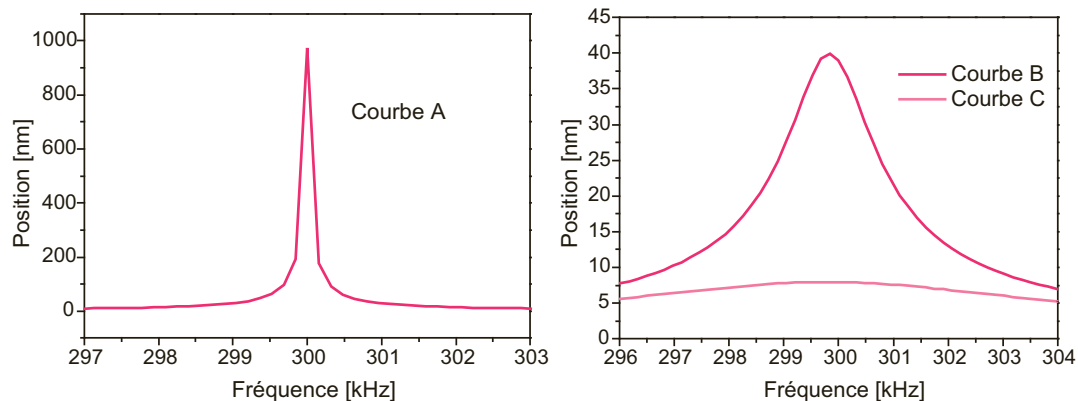
$$\underline{z} = X_o e^{i(\omega t + \varphi)} \text{ et } A_o \cos \omega t = \text{Re}(\underline{A}) \text{ avec } \underline{A} = A_o e^{i\omega t}.$$

b) En déduire une expression de Z_o (l'amplitude) et φ (la phase) en fonction de A_o , ω , ω_o et $\lambda = 2\alpha/m$.

c) Afin d'obtenir une image AFM, l'opérateur doit choisir une fréquence d'oscillation du micro-levier telle que son amplitude d'oscillation soit maximale. Déterminer la pulsation ω_r pour que l'amplitude des oscillations du micro-levier AFM soit maximale.

d) Le facteur de qualité Q est défini par $Q = \frac{\omega_o}{2\lambda}$. Sachant que dans

le vide $Q_{\text{vide}} = 5000$, dans l'air $Q_{\text{air}} = 200$ et dans l'eau $Q_{\text{eau}} = 40$, calculer l'amplitude maximale des oscillations (Z_{max}) et la fréquence de résonance f_r correspondants aux trois cas précédents. En déduire dans quels milieux ont été obtenues les courbes d'amplitude (A, B et C) en fonction de la fréquence illustrées par la figure suivante.



Courbes d'amplitudes en fonctions de la fréquence d'excitation obtenues dans différents milieux (vide, air et eau).

SOLUTIONS

1) *Système* : micro-levier

Référentiel : terrestre galiléen

Repère : axe verticale $z'z$ vers le bas ; une origine O position du micro-levier à l'équilibre.

Forces appliquées : $\vec{P}$ le poids du micro-levier, $\vec{T}$ la force de rappel exercée par le micro-levier, $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ la force de frottement fluide due au milieu et $\vec{F}$ la force imposée pour faire vibrer le micro-levier.
À l'équilibre :

$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = \vec{0}$ et on n'applique pas de force extérieure pour faire vibrer le micro-levier ($F=0$). On obtient en projetant sur un axe verticale descendant Oz : $mg - k(l - l_o) = 0$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation sur Oz on obtient :

$$m\ddot{z} = mg - k[(l - l_o) + z] - \alpha\dot{z} + F_o \cos \omega t$$

$$m\ddot{z} = [mg - k(l - l_o)] - kz - \alpha\dot{z} + F_o \cos \omega t$$

Avec la condition d'équilibre on obtient :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} + F_o \cos \omega t \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_o}{m} \cos \omega t$$

En posant $\lambda = \alpha/2m$. (facteur d'amortissement) on obtient l'équation différentielle du second ordre avec second membre :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2 z = A_o \cos \omega t \quad (1)$$

avec $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation de l'oscillateur harmonique non amorti

2) Dans le cas de frottement faible la solution est de la forme (voir cours ou exercice 4.2) :

$$z = Z_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \text{ avec } \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} \text{ et } \lambda = \alpha/2m$$

3) Si on réécrit l'équation différentielle obtenue au 1) on a :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2 z = A_o \cos \omega t \Rightarrow \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2 z = \underline{A}$$

avec : $\dot{z} = i\omega Z_o e^{i(\omega t + \varphi)}$ et $\ddot{z} = (i\omega)^2 Z_o e^{i(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 Z_o e^{i(\omega t + \varphi)}$

D'où :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2 z = A \Rightarrow (-\omega^2 + 2\lambda i\omega + \omega_o^2) Z_o e^{i(\omega t + \varphi)} = A_o e^{i\omega t}$$

Ou encore :

$$(-\omega^2 + 2\lambda i\omega + \omega_o^2) Z_o e^{i\varphi} = A_o$$

b) On a donc : $Z_o e^{i\varphi} = \frac{A_o}{(\omega_o^2 - \omega^2 + 2\lambda i\omega)}$

En égalisant les modules des nombres complexes de part et d'autre de l'égalité on déduit l'amplitude Z_o :

$$Z_o = \frac{A_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}$$

De même la phase est l'argument du nombre complexe à droite de l'égalité (1) d'où :

$$\varphi = -\arg(\omega_o^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega) \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

c) $X_o(\omega)$ maximale $\Rightarrow D^2 = (\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2$ minimale

En posant $u = \omega^2$ on a : $D^2 = (\omega_o^2 - u)^2 + 4\lambda^2 u$ minimale

Pour minimiser cette fonction il suffit de chercher si la dérivée par rapport à la pulsation peut s'annuler. On a alors :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = \frac{dD^2}{du} \frac{du}{d\omega} = [-2(\omega_o^2 - u) + 4\lambda^2] \frac{du}{d\omega}$$

En remplaçant u par ω^2 et en remarquant que la dérivée de u par rapport à la pulsation ω vaut 2ω , l'expression précédente s'écrit :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = 4\omega[(\omega^2 - \omega_o^2) + 2\lambda^2]$$

cette dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega^2 = \omega_o^2 - 2\lambda^2$

La pulsation ω n'étant pas nulle (il y a une excitation du micro-levier), on en déduit que la fréquence d'excitation du micro-levier AFM pour que l'amplitude soit maximale est égale à :

$$\omega_r^2 = \omega_o^2 - 2\lambda^2$$

Remarque : ce maximum en amplitude ne se produira que si $\omega_o^2 - 2\lambda^2 > 0$ c'est-à-dire pour des amortissements faibles.

$$\text{d) On a donc : } \omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\frac{\omega_o^2}{Q^2}} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{2}{Q^2}}$$

$$\text{Donc : } f_r = \omega_r / 2\pi = \frac{\omega_o}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{2}{Q^2}} = f_o \sqrt{1 - \frac{2}{Q^2}}$$

(f_o fréquence propre de l'oscillateur)

De même l'amplitude est maximale lorsque $\omega = \omega_r$ c'est-à-dire :

$$Z_{o\max} = \frac{A_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_r^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_r^2}} = \frac{A_o}{\sqrt{(2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(\omega_o^2 - 2\lambda^2)}}$$

$$Z_{o\max} = \frac{A_o}{2\lambda \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$$

En fonction de Q on obtient :

$$Z_{o\max} = \frac{A_o}{\frac{\omega_o}{Q} \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\omega_o^2}{4Q^2}}} = \frac{A_o}{\omega_o^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2A_o}{(2\pi f_o)^2} \frac{Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\text{A.N. : } f_o = 300 \text{ kHz } A_o = 710,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

	$Q_{\text{vide}} = 5000$	$Q_{\text{air}} = 200$	$Q_{\text{eau}} = 40$
f_r [kHz]	300,00	300,00	299,81
$Z_{o\max}$ [nm]	999,8	40,0	8,0

On en déduit que la courbe A a été réalisée dans le vide, la courbe B dans l'air et la courbe C dans l'eau.

ANNEXE

UTILISATION DE LA REPRÉSENTATION COMPLEXE

Les calculs qu'on peut être amené à effectuer avec des fonctions sinus et cosinus se font en utilisant les relations trigonométriques et conduisent souvent à des manipulations longues et délicates. Une façon de simplifier les calculs consiste à utiliser la représentation de l'oscillateur dans l'espace complexe.

La position $x(t)$ de l'oscillateur est définie par l'association de son amplitude X_m et de sa phase $\Phi(t) = (\omega t + \varphi)$ à l'instant t . On peut donc associer à cette fonction réelle $x(t)$ un nombre complexe $\underline{x}(t)$ dont le module correspond à l'amplitude maximale et l'argument à la phase :

$$\underline{x}(t) = X_m \cos \Phi(t) \Leftrightarrow \underline{x} = [|\underline{x}| = X_m ; \text{Arg}(\underline{x}) = \Phi] \quad (\text{A.1})$$

L'application qui à $x(t)$ associe $\underline{x}(t)$ est une bijection : à une fonction réelle donnée ne correspond qu'une fonction complexe et réciproquement. La relation (A.1) permet de passer de l'espace non physique complexe à l'espace physique réelle.

En notant i l'imaginaire pur tel que $i^2 = -1$, la fonction complexe $\underline{x}(t)$ peut aussi s'écrire (voir encart 4.1) :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{i\Phi} = X_m [\cos \Phi + i \sin \Phi] \quad (\text{A.2})$$

En notant $a = \text{Re}(\underline{x})$ la partie réelle du complexe $\underline{x}(t)$ et $b = \text{Im}(\underline{x})$ la partie imaginaire, on a :

$$a = \text{Re}(\underline{x}) = X_m \cos \Phi \quad (\text{A.3})$$

$$b = \text{Im}(\underline{x}) = X_m \sin \Phi \quad (\text{A.4})$$

On constate alors que la fonction réelle $x(t)$ ayant une signification physique coïncide avec la partie réelle du complexe associé $\underline{x}(t)$. La relation (A.1) peut donc s'écrire aussi :

$$x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t)) \quad (\text{A.5})$$

Avec la notation complexe, il est possible d'isoler le terme ωt et faire apparaître une amplitude complexe $\underline{X}_m$. En effet, on obtient alors :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{i\Phi} = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{A.6})$$

$$\underline{x}(t) = X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{X}_m e^{i\omega t} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{avec } \underline{X}_m = X_m e^{i\varphi} = X_m [\cos\varphi + i\sin\varphi] \quad (\text{A.8})$$

Le complexe $\underline{X}_m$ est l'amplitude complexe et contient tous les renseignements physiques intéressants c'est à dire l'amplitude X_m (correspondant au module du complexe) et la phase à l'origine φ (correspondant à l'argument de ce même complexe). On a :

$$\begin{cases} X_m = |\underline{X}_m| \\ \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

La représentation de l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ dans le plan complexe est un vecteur de norme X_m faisant un angle φ avec l'axe des réels (figure A.1).

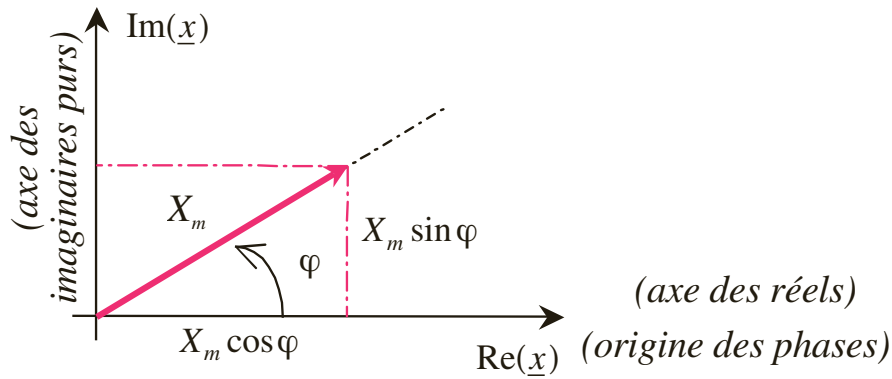


Figure A.1 Représentation de l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ dans le plan complexe.

De la même façon, il est possible de définir une vitesse complexe, dérivée de la fonction complexe $\underline{x}(t)$ associée à la position $x(t)$ de l'oscillateur. On aura :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(X_m e^{i\omega t}) = i\omega X_m e^{i\omega t} = i\omega \underline{x} \quad (\text{A.10})$$

L'imaginaire pur i correspond à un complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ (voir encart A.1). On peut donc écrire encore :

$$\underline{v} = i\omega X_m e^{i\omega t} = \omega \underline{x} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{A.11})$$

$$\underline{v} = \omega X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} e^{i\frac{\pi}{2}} = \omega X_m e^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{A.12})$$

La vitesse complexe peut aussi s'écrire en faisant apparaître son module et son argument :

$$\underline{v} = \underline{V}_m e^{i\omega t} = V_m e^{i\psi} e^{i\omega t} = V_m e^{i(\omega t + \psi)} \quad (\text{A.13})$$

En comparant les expressions (A.12) et (A.13) on a :

$$\begin{cases} V_m = \omega X_m \\ \psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

On peut revenir à l'expression réelle de la vitesse en utilisant la relation (A.1) ou (A.5) :

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \psi) \\ v(t) &= \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

On constate que la vitesse est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la position (voir figure A.2) : la vitesse est en quadrature de phase avec $x(t)$.

En utilisant la relation $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$, cette vitesse peut encore s'écrire :

$$v(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{A.16})$$

L'expression (A.16) peut être obtenue directement en dérivant la position $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$.

De même on peut calculer l'accélération de l'oscillateur :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(i\omega \underline{x}) = i\omega \frac{d\underline{x}}{dt} = (i\omega)(i\omega \underline{x}) = -\omega^2 \underline{x} \quad (\text{A.17})$$

$$\underline{a} = -\omega^2 \underline{x} = (-1)\omega^2 X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (\text{A.18})$$

Le réel (-1) peut se considérer comme un complexe de module 1 et d'argument π (voir encart A.1). On peut donc écrire encore :

$$\underline{a} = e^{i\pi} \omega^2 X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \omega^2 X_m e^{i(\omega t + \varphi + \pi)} \quad (\text{A.19})$$

L'accélération complexe peut aussi s'écrire en faisant apparaître son module et son argument :

$$\underline{a} = \underline{A}_m e^{i\omega t} = A_m e^{i\alpha} e^{i\omega t} = A_m e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (\text{A.20})$$

En comparant les expressions (A.19) et (A.20) on a :

$$\begin{cases} A_m = \omega^2 X_m \\ \alpha = \varphi + \pi \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

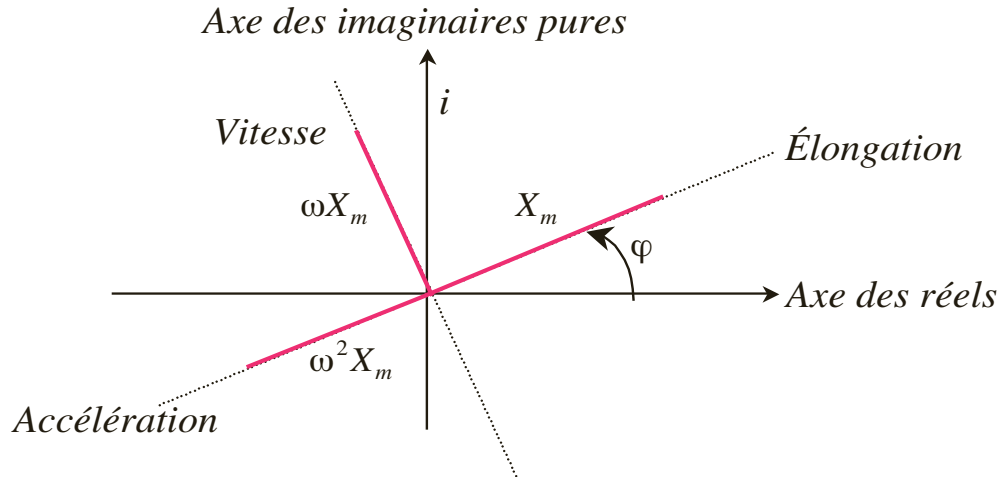


Figure A.2 Représentation de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération dans le plan complexe.

On peut revenir à l'expression réelle de l'accélération en utilisant la relation (A.1 ou (A.5) :

$$\begin{aligned} a(t) &= A_m \cos(\omega t + \alpha) \\ a(t) &= \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

On constate que l'accélération est déphasé de π par rapport à la position (voir figure A.2) : elle est en opposition de phase par rapport à $x(t)$. On peut aussi dire que l'accélération est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la vitesse.

En utilisant la relation $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$, cette accélération peut encore s'écrire :

$$a(t) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{A.23})$$

L'expression (A.23) est bien la dérivée seconde de la position $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$.

Encart A.1 Rappel sur les complexes

Définitions :

$\underline{z} = a + ib$ avec a et b réels et i imaginaire pur tel que $i^2 = -1$

$\underline{z}^* = a - ib$ est le complexe conjugué de $\underline{z}$

Le réel a est la partie réelle du complexe notée : $\text{Re}(\underline{z}) = a$

Le réel b est la partie imaginaire du complexe notée : $\text{Im}(\underline{z}) = b$

– Si $b = 0$ alors $\underline{z} = a$ est un réel

– Si $a = 0$ alors $\underline{z} = ib$ est un imaginaire pur

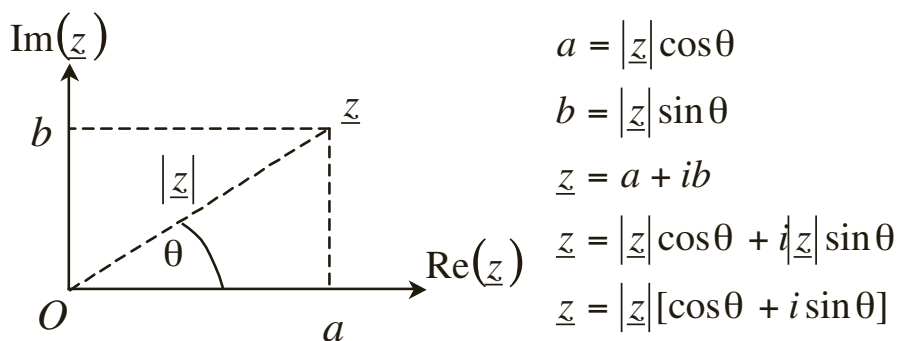
Module du complexe : $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\underline{z}\underline{z}^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\underline{z}|^2$$

Représentation dans le plan complexe : L'axe des abscisses est l'axe des réels, l'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires purs.

$$\underline{z} = a + ib \Rightarrow \overrightarrow{OZ} \text{ composantes } (a, b)$$

Le vecteur $\overrightarrow{OZ}$ fait un angle θ avec l'axe des réels.



Notation exponentielle : avec $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\underline{z} = |\underline{z}| e^{i\theta} \Leftrightarrow \underline{z} = |\underline{z}| [\cos \theta + i \sin \theta]$$

L'angle θ est appelé argument du complexe $\underline{z}$ et noté :

$$\arg(\underline{z}) = \theta \text{ avec } \tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Im}(\underline{z})}{\text{Re}(\underline{z})}$$

Un complexe $\underline{z}$ est parfaitement défini par :

son module $|\underline{z}|$ et son argument $\arg(\underline{z}) = \theta$

ou

sa partie réel $\operatorname{Re}(\underline{z}) = a$ et sa partie imaginaire $\operatorname{Im}(\underline{z}) = b$

Règles de calculs :

$$|\underline{z}_1 \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| |\underline{z}_2| ; \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} ;$$

$$\left| \frac{\underline{z}_1^n}{\underline{z}_2^m} \right| = |\underline{z}_1^n \underline{z}_2^{-m}| = |\underline{z}_1^n| |\underline{z}_2^{-m}| = |\underline{z}_1|^n |\underline{z}_2|^{-m} = \frac{|\underline{z}_1|^n}{|\underline{z}_2|^m}$$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{\underline{z}_1^n}{\underline{z}_2^m}\right) &= \arg(\underline{z}_1^n \underline{z}_2^{-m}) = \arg(\underline{z}_1^n) + \arg(\underline{z}_2^{-m}) \\ &= n \arg(\underline{z}_1) - m \arg(\underline{z}_2) \end{aligned}$$

Index

B

bande passante 215
base de Frenet 17

C

champ de gravitation 70
champ de pesanteur 71
choc élastique 132
choc inélastique 133
choc mou 134
coordonnées cartésiennes 5
coordonnées cylindriques 10
coordonnées polaires 6

D

décrément logarithmique 179
dérivation d'un vecteur 18

F

facteur de qualité 185
forces conservatives 115

G

gradient 117

M

moment cinétique 66
moment d'une force 66
mouvement parabolique 39

P

pendule simple 81
produit scalaire 8
produit vectoriel 38

R

référentiel de Copernic 3
référentiel géocentrique 3
référentiel terrestre 4
régime critique 183
régime pseudo-périodique 175
résonance de vitesse 209

T

tension d'un ressort 78
théorème de l'énergie cinétique 114
théorème de l'énergie mécanique 124
théorème du centre d'inertie 65

V

vecteur déplacement élémentaire 22
vecteur quantité de mouvement 60
vecteur vitesse angulaire 21

MINI MANUEL

Michel HENRY
Nicolas DELORME

Mini Manuel de Mécanique du point

Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les démarches avant de les mettre en application ?

Conçus pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, les Mini Manuels proposent **un cours concis et richement illustré** pour vous accompagner jusqu'à l'examen. Des **exemples sous forme d'encarts, des mises en garde** et des **méthodes** pour éviter les pièges et connaître les astuces, enfin **des exercices, tous corrigés**, complètent le cours.

Ce Mini Manuel de Mécanique du point présente l'essentiel à comprendre et à savoir en Mécanique du point pour tout étudiant en L1/L2 de Sciences de la Matière, Sciences Physiques et en Sciences pour l'Ingénieur.

Contenu :

- Cinématique du point
- Lois de Newton et forces
- Travail, puissance et énergie
- Oscillateurs mécaniques libres
- Oscillateurs mécaniques forcés

Michel Henry

Agrégé de physique
Maître de conférences
à l'IUFM des Pays de
Loire (Le Mans).

Nicolas Delorme

Maître de conférences
à l'université du Maine
(Le Mans).

Public :

♦ **L1/L2
de Sciences
de la Matière,
Sciences
Physiques et
Sciences pour
l'Ingénieur**

