

## Série de TD n°01

### Exercice n°1

1. Dans le système *MKSA*, écrire les équations aux dimensions et donner les unités des grandeurs physiques suivantes : force, poids, énergie, travail et puissance.
2. La force d'attraction gravitationnelle entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , séparées par une distance  $r$ , est donnée par :  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ . Déterminer la dimension de la constante  $G$ .

### Exercice n°2

On considère la formule :  $y = \frac{b}{c}x^3 + bx^2 + a$ . Où  $x$  est une longueur et  $[y] = MLT^{-3}$ .

1. Dans le système *MKSA*, écrire les équations aux dimensions des grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. Vérifier l'homogénéité de la relation  $y = \frac{a^2}{2b}x$ .

### Exercice n°3

On considère un pendule simple constitué d'une bille de masse  $m$  suspendue à un fil inextensible de longueur  $\ell$  et de masse négligeable, oscillant dans le champ de pesanteur d'intensité  $g$ . La période d'oscillation  $T$  de ce pendule est donnée par la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}. \quad \text{On donne : } \ell = 1.000 \pm 0.001 \text{ m et } g = 9.80 \pm 0.01 \text{ m/s}^2.$$

1. Calculer la valeur nominale de  $T$  en utilisant les valeurs mesurées de  $\ell$  et  $g$ .
2. Déterminer l'incertitude absolue  $\Delta T$  sur  $T$  en utilisant la méthode de la différentielle puis la méthode logarithmique. Présenter le résultat sous la forme :  $T = T_{\text{mesurée}} \pm \Delta T$ .

### Exercice n°4

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :

$$A(2,3,0), \quad B(-2,2,4), \quad C(4,-2,2).$$

1. Représenter, dans ce repère, ces trois points, ainsi que les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  et  $\overrightarrow{AB}$ .
2. Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{AB}$  dans la base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , puis calculer leurs modules.
3. Exprimer puis représenter la somme  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ . Commenter le résultat.

### Exercice n°5

Dans un repère orthonormé  $OXYZ$ , de base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Calculer les produits  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ .
2. Calculer l'angle  $\theta$  formé par les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
3. Trouver l'aire du parallélogramme que l'on peut construire à partir de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
4. Montrer que le vecteur  $\vec{v}_3$  est perpendiculaire au plan  $(P)$  formé par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
5. Montrer que le vecteur  $\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$  appartient au plan  $(P)$ .

### Exercice n°6

Soient les vecteurs :  $\vec{v}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  ;  $\vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  ;  $\vec{v}_3 = 3\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$  ;  $\vec{v}_4 = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

1. Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur  $\vec{v}_1$ . Calculer  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ .
2. Calculer l'angle que fait le vecteur  $\vec{v}_1$  avec sa projection sur le plan  $XOY$ .
3. Montrer que  $\vec{v}_4$  n'est pas perpendiculaire au plan  $(P)$  formé par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
4. Calculer les produits  $\vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$  et  $\vec{v}_4 \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$ .
5. En déduire le volume du parallélépipède que l'on peut construire à partir de  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_4$ .

### Exercice n°7

Soit  $V(x, y, z)$  un champ scalaire (*représentant un potentiel électrique par exemple*). Sa valeur en tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace est donnée par l'expression :

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy - z$$

Soit le champ vectoriel  $\vec{E}(x, y, z)$  (*représentant un champ électrique par exemple*), relié au champ  $V$  par la relation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

1. Exprimer  $\vec{E}$  dans la base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer le vecteur  $\vec{E}$  au point  $N(1, 2, 3)$ .
2. Déterminer le module de la projection de  $\vec{E}$  sur le vecteur  $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  au point  $N$ .

### Exercices Supplémentaires

(Ces exercices ne seront pas corrigés en TD, mais il est fortement recommandé de les traiter)

### Exercice n°8

1. Etablir les équations aux dimensions de :
  - La permittivité du vide  $\epsilon_0$ , qui apparaît dans l'expression de la force d'interaction électrique (loi de Coulomb) s'exerçant entre deux charges électriques  $q$  et  $q'$  séparées par une distance  $r$  :  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$
  - La perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$ , qui apparaît dans la loi de Laplace qui permet de prévoir la force d'interaction entre deux fils conducteurs parallèles de longueur  $L$ , placés dans le vide, séparés par une distance  $d$  et parcourus par des courants  $I$  et  $I'$  :  $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{II'}{d} L$
2. Vérifier l'homogénéité de la relation  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , où  $c$  représente la célérité (vitesse) de la lumière dans le vide.

### Exercice n°9

Dans un repère orthonormé  $OXYZ$ , de base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{v}_2 = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

1. Déterminer la valeur du réel  $\lambda$  pour que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  soient perpendiculaires.
2. On pose :  $\lambda = 2$ . Trouver l'angle formé par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Représenter  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .

### Exercice n°10

Soient les vecteurs :  $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$  ;  $\vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  ;  $\vec{v}_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

1. Trouver l'angle formé par  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ .
2. Calculer l'aire du parallélogramme que l'on peut construire à partir de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
3. Calculer le volume du parallélépipède que l'on peut construire à partir de  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ .

### Exercice n°11

Soient les vecteurs :  $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ;  $\overrightarrow{OB} = -\vec{j} + \vec{k}$  ;  $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

1. Calculer les longueurs des cotés  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$  du triangle  $ABC$ .
2. Trouver les angles aux sommets  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  du triangle  $ABC$ . Calculer  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ .

### Exercice n°12

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , à tout instant  $t$ , on considère les vecteurs :

$$\vec{V}(t) = e^{-t}\vec{i} - 2\cos(3t)\vec{j} + \sin(3t)\vec{k}, \quad \vec{H}(t) = e^{2t}\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} - 2\sin(3t)\vec{k}$$

1. Déterminer, à l'instant  $t = 0$ , les expressions de  $\vec{V}$  et  $\frac{d\vec{V}}{dt}$ .
2. Trouver l'instant  $t_1$  où le vecteur  $\vec{H}$  est perpendiculaire à  $\vec{V}$ .

### Exercice n°13

Soient le vecteur  $\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xz^2\vec{k}$  et la fonction  $f(x, y, z) = x^2y z^2 + y^2z x^3$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ,  $\text{div } \vec{V}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  et  $\Delta f$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$  et  $\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0$ .