Exo n°1 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. le déterminant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3$$

$$-1 - a^3 = 0 \iff a^3 = -1 \iff a = -1$$

Donc A est inversible ssi $\det(A) \neq 0 \iff a^3 \neq -1 \iff a \neq -1$.

A est inversible si $a \neq -1$.

2. si $a \neq -1$ on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A)$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = -\frac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} \\ \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} \\ \frac{-a}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} \end{pmatrix}$$

Exo n°2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

1. $\det(A - \lambda I_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & a-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ a-2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (-\lambda)(a-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 0 & \text{une valeur simple} \\ \lambda = a & \text{une valeur simple} \\ \lambda = 2 & \text{une valeur simple} \end{cases}$$

A est diagonalisable si les trois valeurs propres sont différentes

Alors A est diagonalisable si $a \neq 0$ et $a \neq 2$.

La matrice de passage P :

*) le vecteur propre associé à $\lambda = 0$:

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ a x_2 = 0 \\ (a-2)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ \text{et} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1$$

*) le vecteur propre associé à $\lambda = a$:

$$(A - aI_3) X = 0 \iff \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & -(a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a x_1 + x_2 = 0 \\ (a-2) x_2 - (a-2) x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_2 = a x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ a x_1 \\ a x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \rightarrow v_2$$

*) le vecteur propre associé à $\lambda = 2$:

$$(A - 2I_3) X = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ (a-2) x_2 = 0 \\ (a-2) x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{car } (a-2) \neq 0 \quad (a \neq 2)$$

$$\iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow v_3$$

d'où la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$. et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

telle que $a \neq 0$ et $a \neq 2$.

2. Le système $X'(t) = AX(t)$. $\iff \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = a x_2(t) \\ x_3'(t) = (a-2) x_2(t) + 2x_3(t). \end{cases}$

la solution de ce système est de la forme suivante :

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}k_1e^{at}\\k_2e^{at}\\k_3e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&a&0\\0&a-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2e^{at}\\k_3e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_2e^{at}\\ak_2e^{at}\\(a-2)k_2e^{at}+2k_3e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Exo n°3 : Soit $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

1. La diagonalisation de A :

*) les valeurs propres de A : $\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-1 & \text{valeur simple}\\ \text{ou}\\ \lambda=1 & \text{valeur simple}\end{cases}$

deux valeurs propres différentes donc A est diagonalisable.

*) Le vecteur propre associé à $\lambda=-1$:

$(A+I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1+x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=-x_2$

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\to v_1$

*) le vecteur propre associé à $\lambda=1$:

$(A-I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2$

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\to v_2$

d'où la matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ et la matrice diagonale

$D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

2. Le système différentiel $X'(t)=AX(t)$

la solution de ce système est donnée par

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}k_1e^{-t}\\k_2e^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1e^{-t}\\k_2e^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1e^{-t}+k_2e^{t}\\-k_1e^{-t}+k_2e^{t}\end{pmatrix}.$$

Exo n°4 : $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$

1. La diagonalisation de A :

*) les valeurs propres de A : $\det(A - \lambda I_3) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2-\lambda)\left((-\lambda)(4-\lambda)+4\right) = 0$$

$$\iff (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$\iff (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\iff -(2-\lambda)^3 = 0$$

$$\iff (2-\lambda)^3 = 0$$

$\iff \lambda = 2$ une valeur multiple de multiplicité 3.

*) les vecteurs propres associés à $\lambda = 2$:

$$(A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = 2x_1$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs propres associé à une valeur propre de multiplicité 3 donc A n'est pas diagonalisable.

2. calculons $(A - 2I_3)^2$:

on a $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ainsi $(A - 2I_3)^0 = I_3$, $(A - 2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geq 2$ on a $(A - 2I_3)^n = 0$, on en déduit A^n.

Notons $B = A - 2I_3$, on a $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ avec $B^n = 0$

$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$, car B et $2I_3$ commutent

où les C_n^k sont les coefficients du Binôme de Newton

$C_n^k = \frac{n!}{\ldots}$ (4) page

Or, pour $k \geq 2$, on $B^k = 0$ d'où pour $n \geq 2$

$$A^n = C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1}$$
$$= 2^n I_3 + 2^{n-1} n . B$$
$$= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3)$$
$$= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n . A .$$

o —— o

Exo n°5 : ~~soit~~ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Les valeurs propres de A :

$$|A - \lambda I_3| = 0 \iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$\iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda)\big((3-\lambda)(1+\lambda) - 4\big) = 0$$

$$\iff (1-\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0$$

$$\iff -(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\iff -(1-\lambda)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\iff (\lambda - 1)^3 = 0 \iff \lambda = 1$$ une valeur multiple de multiplicité 3.

2. Calculons $(A - I_3)^2$ et démontrons que $A^n = nA + (1-n) I_3$.

on calcul d'abord la matrice $A - I_3$

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis la matrice $(A - I_3)^2$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est donc la matrice nulle.

Nous allons donner deux méthodes pour démontrer que

$A^n = nA + (1-n) I_3$.

*) $1^{ière}$ méthode : En utilisant le Binôme de Newton.

On écrit $A^n = (A - I + I)^n$, or les matrices $A - I$ et I commutent, on a donc

$$(A - I + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A - I)^k I_3^{n-k}$$

$$= C_n^0 I_3 + C_n^1 (A - I_3)$$

$$= I_3 + n(A - I_3)$$

$$= nA + (1-n) I_3.$$

*) $2^{ième}$ méthode : Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$. Fixons n arbitrairement pour lequel on suppose que :

$A^n = nA + (1-n) I_3$, on a alors

$$A^{n+1} = A\left(nA + (1-n) I_3\right) = nA^2 + (1-n)A$$

Sachant que $(A - I_3)^2 = 0$, on en déduit que

$$A^2 = 2A - I_3 \quad \text{ainsi}$$

$$A^{n+1} = n(2A - I_3) + (1-n)A$$

$$= (n+1)A - nI_3$$

$$= (n+1)A + (1-(n+1)) I_3$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXO n° 6 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. la factorisation de $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 0 \\ 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

2. $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ une valeur simple} \\ \lambda = -1 \text{ une valeur multiple de multiplicité } 2. \end{cases}$

*) ~~Le~~ vecteur propre associé à $\lambda = 1$:

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*) Les vecteurs propres associés à $\lambda = -1$:

$$(A + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un seul vecteur propre associé à une valeur propre multiple donc A n'est pas diagonalisable.

On peut pas construire la matrice de passage P.

3. On peut pas résoudre le système différentiel $X'(t) = A\,X(t)$ car A n'est pas diagonalisable.