Université A. Mira, Béjaïa,
Faculté de Technologie, Département de Génie–Civil,
Module d'Elasticité, Master 1

Année universitaire 2013-2014

EPREUVE D'ELASTICITE – SEMESTRE 1
(DUREE : 02H00)

Exercice 1 *(8 pts)*

On considère les deux états de contraintes suivants agissant en un point d'un solide défini dans un repère orthonormé OX_1X_2 : $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} MPa$; $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} MPa$

1) Donner l'expression de la matrice, notée A, de rotation de repère d'angle $\alpha = 63.435°$
2) Donner l'expression de la matrice, notée R, de rotation de repère d'angle $\beta = -18.435°$
3) On note S'et D' les tenseurs des deux états des contraintes dans un repère $OX_1'X_2'$ définit par la rotation d'angle α du repère OX_1X_2. Evaluer S'et D' et commenter le résultat.
4) On note S'' le tenseur du premier état des contraintes dans un repère $OX_1''X_2''$ définit par la rotation d'angle β du repère $X_1'X_2'$. Evaluer S'' et commenter le résultat par rapport à S.
5) Donner les contraintes et directions principales des deux tenseurs S et D.
6) Calculer les contraintes principales de la superposition des deux états : $\sigma = S + D$ et commenter le résultat.
7) Montrer que ce dernier résultat (question 6) est général (c'est-à-dire que les contraintes principales d'une superposition de deux états de contraintes n'est pas nécessairement une superposition des contraintes principales de chacun des deux états)
8) Dans quel cas où cette superposition peut s'appliquer

(Les calculs doivent être faits avec 4 chiffres significatifs)

Exercice 2 *(7 pts)*

On considère un état des contraintes et un vecteur normal donnés par les composantes suivantes rapportées à un repère $Ox_1x_2x_3$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 10 \\ 10 & 10 & -2 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad ; \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer les composantes normale T_n et tangentielle T_τ du vecteur contrainte agissant sur le plan de normale n. Commenter le résultat.
2) Déterminer les deux plans parallèles au vecteur n et dont la normale est inclinée de 45° par rapport à l'axe Ox_1. Calculer l'angle entre ces deux plans.
3) Déterminer les vecteurs contraintes et leurs composantes normale et tangentielle agissant sur les deux plans.
4) Déterminer, sans la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres, les contraintes et les directions principales du tenseur σ

Exercice 3 *(5 pts)*

Soit un tenseur S dont les composantes, rapportées au repère $OX_1X_2X_3$, sont données par :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Développer les expressions suivantes et donner leurs résultats numériques en précisant ce qu'elles représentent.

a) $S_{ij}S_{ji}$ b) $S_{ij}S_{jk}S_{ki}$ c) $S_{ij}S_{jk}S_{k\ell}S_{\ell i}$ d) $\mathcal{E}_{ijk}\ S_{2i}S_{3j}S_{1k}$

2) Montrer que le déterminant de S reste inchangé lors de la rotation de repère

Rappel : $|AB| = |A|\ |B|$

Bon courage *A. Seghir*

Solution

Exercice 1

1) $\alpha = 63.435°$ $A = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 \\ -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix}$ (0.5)

2) $\beta = -18.4350°$ $R = \begin{bmatrix} 0.9487 & -0.3162 \\ 0.3162 & 0.9487 \end{bmatrix}$ (0.5)

3) $S' = A\,S\,A^T = \begin{bmatrix} 3.4 & -1.8 \\ -1.8 & -1.4 \end{bmatrix}$ MPa ; $D' = A\,D\,A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ MPa (0.5)+ (0.5)

Commentaire :
Le repère $OX_1'X_2'$ est le repère principal du second état des contraintes D et ses contraintes principales sont : $+3$ MPa et -2 MPa (0.5)

4) $S'' = R\,S'\,R^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ MPa (0.5)
Le repère $OX_1''X_2''$ est le repère principal du premier état des contraintes S, le tenseur est diagonal après deux rotations : la rotation vaut $\alpha + \beta = 45°$ (0.5)

5) Contraintes et directions principales
Tenseur S : 4MPa et -2 MPa , $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 1]$; $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1 \quad 1]$ (1 pt)
Tenseur D : 3MPa et -2 MPa , $V_1 = [0.4472 \quad 0.8944]$; $V_2 = [-0.8944 \quad 0.4472]$ (0.5)

6) Superposition des deux états : $\sigma = S + D = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ MPa
$\sigma_1 = 6.72$ MPa ; $\sigma_2 = -3.72$ MPa (0.5)

$V_1 = [0.5969 \quad 0.8023]$; $V_2 = [-0.8023 \quad 0.5969]$; (angle = 53.35496°) (1)
Les contraintes principales ne sont pas la somme de celles des deux états
(Résultat différent) (0.25)

7) Le résultat est général puisque, si on note par B la matrice de rotation entre le repère principal de σ et le repère initial, alors on a :

$$\sigma' = B\sigma\,B^T = B(S + D)B^T = BSB^T + BDB^T$$

et B ne peut pas diagonaliser les deux matrices en même temps (soit $B = A$ ou bien $B = R$) (1)

8) La superposition s'applique si les deux tenseurs sont diagonalisables avec la même matrice de rotation et on a deux cas :
a) les deux tenseurs sont égaux ($S = D$) ou bien l'un des deux est sphérique puisque le tenseur sphérique admet toute les directions comme directions principales (0.25)

Exercice 2

1) Contrainte normale et tangentielle

$$T = \sigma\, n = \frac{18}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \text{MPa} \;\; ; \;\; T_n = 18 \text{ MPa} \quad ; T_\tau = 0 \text{ MPa}$$

La contrainte tangentielle est nulle, donc n est une direction principale et 18MPa est une contrainte principale (1.5)

2) Plans parallèles à n : leurs normales noté u sont perpendiculaires à n : $u \cdot n = 0$ soit

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Les normales sont inclinées de 45° par rapport à Ox_1 : $u \cdot e_1 = |u|\,|e_1|\,\cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}|u|$ soit :

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

De plus on sait que $|u| = 1$, ce qui donne trois équations :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$
$$u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0$$
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

(0.75)

Dont la solution est :

$$u^{(1)} = [1 \quad -1 \quad 0]/\sqrt{2}$$
$$u^{(2)} = [-1 \quad 1 \quad 0]/\sqrt{2}$$
$$u^{(3)} = [1 \quad 0 \quad -1]/\sqrt{2}$$
$$u^{(4)} = [-1 \quad 0 \quad 1]/\sqrt{2}$$

(1.5)

Ce qui donne deux plans distincts :
Les deux premières solutions sont des normales parallèles et désignent le même plan
Les deux dernières solutions sont des normales parallèles et désignent un autre plan (0.25)

L'angle entre les deux plans : $\alpha = \arccos\left(u^{(1)} \cdot u^{(3)}\right) = 60°$ (120° accépté) (0.25)

3) Vecteurs contraintes sur les deux plans :

$$T^{(1)} = \pm[6 \quad -6 \quad 0]/\sqrt{2} \quad ; \quad T_n^{(1)} = 6 \text{ MPa} \quad ; \quad T_\tau^{(1)} = 0 \text{ MPa}$$
$$T^{(2)} = \pm[3 \quad 9 \quad -12]/\sqrt{2} \quad ; \quad T_n^{(2)} = -7.5 \text{ MPa} \quad ; \quad T_\tau^{(2)} = 60.75 \text{ MPa}$$

(6x0.25 = 1.5)

4) Les résultats précédents donnent deux directions principales et deux contraintes principales :

$$V_1 = n = [1 \quad 1 \quad 1]/\sqrt{3} \quad ; \;\; \sigma_1 = 18 \text{ MPa}$$
$$V_2 = u^{(1)} = [1 \quad -1 \quad 0]/\sqrt{2} \quad ; \;\; \sigma_2 = 6 \text{ MPa}$$

(0.25)

La 3ème direction se déduit par le produit vectoriel des deux directions :

$$V_3 = V_1 \wedge V_2 = [1 \quad 1 \quad -2]/\sqrt{6}$$

(0.5)

La contrainte correspondante est la composante normale du vecteur contrainte selon V_3 :

$$\sigma_3 = V_3 \cdot [\sigma\, V_3] = 12 \text{ MPa}$$

(0.5)

Exercice 3

1) Quantités en notation indicielle

a) $S_{ij}S_{ji} = 6$: trace(S^2) (0.25) b) $S_{ij}S_{jk}S_{ki} = -3$: trace(S^3) (0.5) c) $S_{ij}S_{jk}S_{k\ell}S_{\ell i} = 18$: trace(S^4) (0.75)

d) $\mathcal{E}_{ijk}\, S_{2i}S_{3j}S_{1k} = -1$: déterminant de S (1)

2) Le déterminant est indépendant de la rotation de repère :

On note par S' l'expression de S dans le repère $OX'_1X'_2X'_3$obtenu par rotation A du repère $OX_1X_2X_3$

Nous avons

$$S' = A.S.A^T \qquad (1)$$

Le déterminant de S est noté d

$$d = |S| \qquad (2)$$

On multiplie à gauche et à droite l'équation (1) par les déterminants de A et $|A^T|$

$$|A|.d.|A^T| = |A|.|S|.|A^T| \qquad (3)$$

Comme $|D|.|B| = |DB|$, D et B deux matrices quelconques

$$|A|.d.|A^T| = d|A\,A^T| = d|I| = d \qquad (4)$$

et

$$|A|.|S|.|A^T| = |A.S.A^T|$$

avec les équations (1) et (4) : (2.5)

$$d = |S'|$$

D'où :

$$|S'| = |S|$$