Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
2ème année Licence de Physique
Année Universitaire 2013/2014
Mécanique quantique I(Physique 5)

TD N°5 : Oscillateur Harmonique

Exercice 1 :
On considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de fréquence angulaire ω. Les opérateurs d'annihilation et de création sont données en termes de x et p par ;

$$a = \frac{x}{\sqrt{2\hbar/m\omega}} + i\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \qquad , \qquad a^+ = \frac{x}{\sqrt{2\hbar/m\omega}} - i\frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

1. Sachant que $[x,p] = i\hbar$, montrer que $[a,a^+] = 1$.
2. Exprimer les opérateurs x et p en fonctions des opérateurs d'annihilation et de création a et a^+.
3. Trouver l'expression des fonctions d'ondes associées à l'état fondamental et au premier état excité de l'O H.
4. Calculer $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ et $\langle p^2\rangle$ pour le nième état de l'O H. Vérifier que le principe d'incertitude est satisfait.
5. Calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle pour le nième état de l'O H.

Exercice 2 :
un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de fréquence angulaire ω est décrit à $t = 0$ par la fonction d'onde :

$$\psi(x,0) = A[3\phi_0(x) + 4\phi_1(x)]$$

où ϕ_0 et ϕ_1 sont les fonctions propres de l'oscillateur harmonique correspondant à l'état fondamental et au premier état excité.

1. Trouver A.
2. Trouver $\psi(x,t)$ et $|\psi(x,t)|^2$.
3. Calculer $\langle x\rangle$ et $\langle p\rangle$. Vérifier que le théorème d'Ehrenfest est satisfait.
4. On procède à une mesure de l'énergie de la particule, donner les résultats possibles et la probabilité correspondant à chaque résultat obtenu.

Exercice 3 :
On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un potentiel oscillateur harmonique. On place cette particule dans une région où subsiste un champ électrique constant E. L'hamiltonien de la particule aura la forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx$$

Résoudre le problème aux valeurs propres de cet hamiltonien (énergies propres et fonctions propres).

Exercices Supplémentaires

Exercice 4 :
On considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de fréquence angulaire ω occupant l'état fondamental. Soudainement, le fréquence angulaire double de valeur, ainsi $\omega' = 2\omega$. Quelle est la probabilité qu'une mesure de l'énergie donne la valeur $\hbar\omega/2$? Quelle est la probabilité d'obtenir la valeur $\hbar\omega$?
Exercice 5 :

1. Montrer que la fonction d'onde

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

   satisfait l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique de masse m et de fréquence angulaire ω. a est une constante réelle ayant la dimension d'une longueur.
2. Trouver $|\psi(x,t)|^2$.
3. Calculer $\langle x\rangle$ et $\langle p\rangle$. Vérifier que le théorème d'Ehrenfest est satisfait.