Exercice 1 : (5 pts) Corrigé de l'examen

(1)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + z = -2 \\ x - 2my + 2z = 1 \\ 5x + 4z = 4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & -2m & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & -2m & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5.(2m + 2m) + 4(-2m - m)$$
$$= 20m - 12m = 8m \quad 0,5$$

On distingue 2 cas :

1er Cas : $|A| \neq 0 \Leftrightarrow 8m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ 0,5

si $m \neq 0$, alors le système (S) est de Cramer et $rg(A) = 3$. 0,5

$C_1 \leftarrow C_1 - C_3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m & 1 \\ 1 & -2m & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{2} \quad 0,25$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-17}{8m} \quad 0,25$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & -2m & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-27}{8} \quad 0,25$$

La solution du système est $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{-17}{8m}, \frac{-27}{8}\right)$

2ème Cas: $m = 0 \longrightarrow |A| = 0$ (0,5) (2)

$|A| = 0 \rightarrow (S)$ n'est pas de Cramer et $rg(A) \leq 2$. (0,5)

Soit A_1 la matrice extraite de A tq:

$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ (0,25) $|A_1| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ le nouveau système (S_1) associé à A_1 est $(S_1) \begin{cases} x + z = -2 - my \\ x + 2z = 1 + 2my \end{cases}$ (0,25)

(S_1) est de Cramer $(rg(A) = 2)$ (0,25)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-my & 1 \\ 1+2my & 2 \end{vmatrix}}{|A_1|} = \frac{-4 - 2my - 1 - 2my}{1} = -4my - 5 = x$$ (0,5)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2-my \\ 1 & 1+2my \end{vmatrix}}{|A_1|} = 1 + 2my + 2 + my = 3 + 3my.$$ (0,5)

la (3) eqt: $5x + 4z = (-4my - 5)5 + 4(3 + 3my)$ (0,25)

$= -20my - 25 + 12 + 12my = -8my ...$

$\neq 4$

donc la solution du système (S) (0,25) n'existe pas.

• Exo-02: soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$C_3 \leftarrow C_2 + C_3$

1) $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & -5 \\ -5 & -7-\lambda & 5 \\ -5 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \sim$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ -5 & -2-\lambda & 5 \\ -5 & -2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \quad = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \\ -5 & -2-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)\big((3-\lambda)(2+\lambda) - 0\big) = (2+\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \quad 0{,}5$$

3

$\rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -2 \text{ est de multiplicité } 2 & 0{,}25 \quad 0{,}25 \\ \lambda_3 = 3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1 & 0{,}25 \quad 0{,}25 \end{cases}$

Les $\vec{Vp}$ de A : soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tq : $(A - \lambda I_3)X = 0$

pour $\lambda = -2$:

$$(A + 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2 + x_3 \\ X = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad 0{,}1 \quad 0{,}5 \quad (\lambda = -2$$

2 $\vec{Vp}$ pour λ de multip$^{\text{té}}$ 2 $\longrightarrow$ A est diagona

* pour $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 5 & -10 & 5 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_2 - 5x_3 = 0 & (1) \\ 5x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 0 & (2) \\ -5x_1 - 5x_2 = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \longrightarrow x_2 = x_3 \\ (3) \longrightarrow x_1 = -x_2 = -x_3 \end{cases} \quad 0{,}1$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ est le $\vec{Vp}$ associé à $\lambda =$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4)

0,5 0,5

3) $A^n = ?$ 0,25

On sait que, $A^n = P D^n P^{-1}$ 0,25 avec $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$A^n = P D P^{-1}$: $P^{-1} = ?$

$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 0,25. P est inversible.

$P^{-1} = \frac{1}{|P|} {}^tC_P = \frac{1}{1} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ +2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 0,5

$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & -(-2)^n + 3^n & (-2)^n - 3^n \\ (-2)^n - 3^n & -(-2)^{n+1} - 3^n & -(-2)^n + 3^n \\ (-2)^n - 3^n & (-2)^n - 3^n & 3^n \end{pmatrix}$ 0,5

4) Resolution du systeme differentiel :

$X'(t) = A X(t)$, A est diagonalisable.

On a, $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_3 = 3$. et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La solution du système s'écrit: ~~[illegible]~~

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix} ;$$

5

0,5

$$\begin{cases} x_1(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t} \\ x_2(t) = C_1 e^{-2t} - C_3 e^{3t} \\ x_3(t) = C_2 e^{-2t} - C_3 e^{3t} \end{cases}$$

$C_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1,3}$.

0,25

$X(0) = (2, 0, 1)$, à $\underline{t=0}$,

$$\begin{cases} x_1(0) = -C_1 + C_2 + C_3 = 2 & (1) \\ x_2(0) = C_1 - C_3 = 0 & (2) \\ x_3(0) = C_2 - C_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow C_1 = C_3$

(3) $\Leftrightarrow C_2 = 1 + C_3$

(1) $\Leftrightarrow \cancel{-C_3} + 1 + \cancel{C_3} + C_3 = 1 + C_3 = 2 \longrightarrow C_3 = 1 = C_1$

et $C_2 = 1 + C_3 = 2$.

Donc la solution du système s'écrit:

$$\begin{cases} x_1(t) = -e^{-2t} + 2e^{-2t} + e^{3t} = e^{-2t} + e^{3t} \\ x_2(t) = e^{-2t} - e^{3t} \\ x_3(t) = 2e^{-2t} - e^{3t}. \end{cases}$$

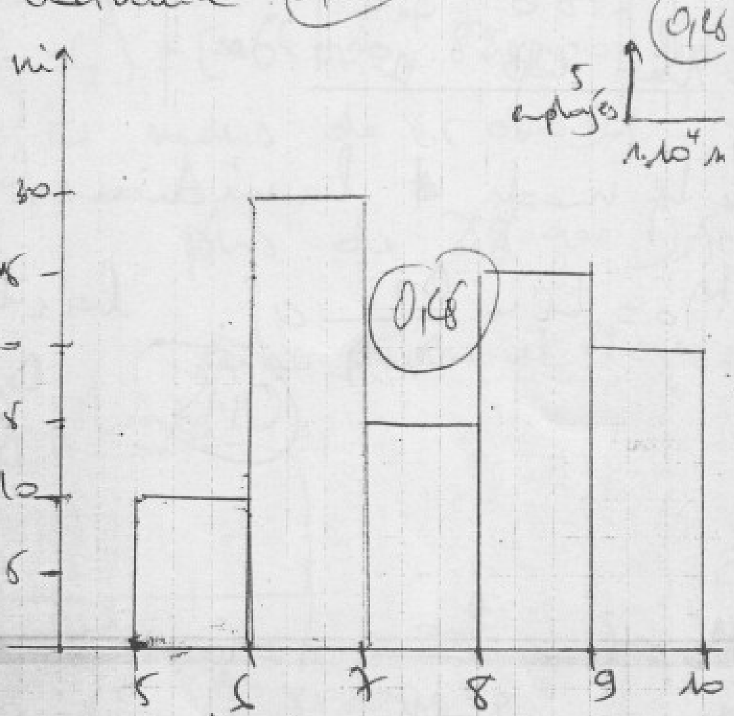
0,25

Exo 2 : Statistiques : (/8)

* La population est : les employés d'une usine. (0,25)
- La taille : 100 employés. (0,25)
- individu : un employé. (0,25)
- caractère : salaires journaliers (0,25)
- nature : quantitative continue (0,25)

Classes	n_i	f_i	C_i
[5, 6[	10	0,1	5,5
[6, 7[	30	0,3	6,5
[7, 8[	15	0,15	7,5
[8, 9[	25	0,25	8,5
[9, 10[	20	0,2	9,5
Σ	100	1	

(0,25)



Histogramme des effectifs (0,25)

- La moyenne et la variance.

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i c_i = \sum_i f_i c_i$ (0,5)

$= \sum_i 0,1 \times (5.5) + 0,3 \times 6,5 + 0,15 \cdot 7.5 + 0,25 \cdot 8,5 + 0,2 \cdot 9.5 =$

$= 0,55 + 1,95 + 1,125 + 2,125 + 1,9 = 7,65 \cdot 10^4$ D.

(0,5)

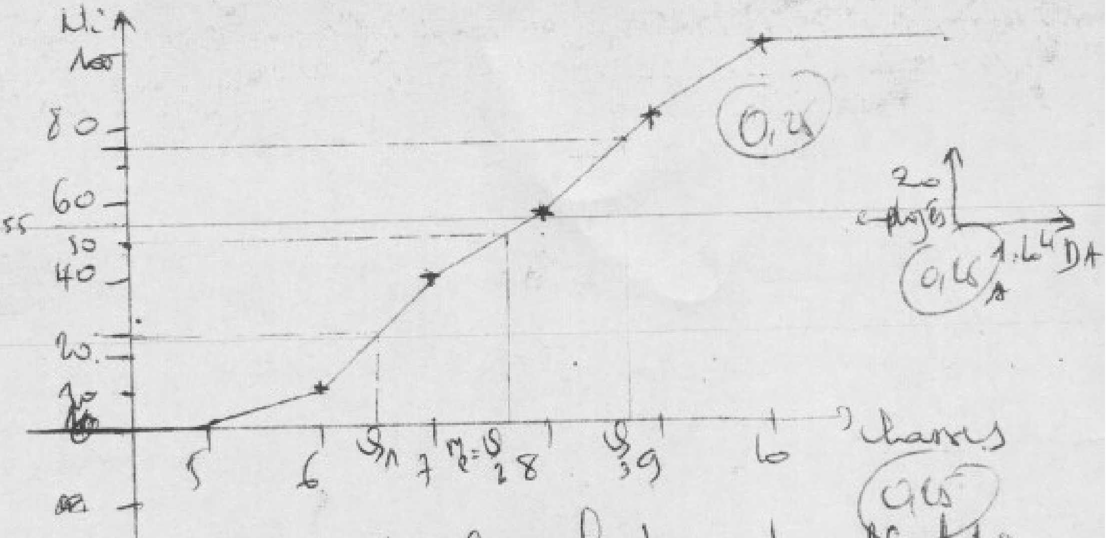
- $V(x) = \sum_i f_i c_i^2 - \bar{x}^2 = 0,1 \cdot (5.5)^2 + 0,3\,(6,5)^2 + 0,15\,(7,5)^2 +$

$0.25 \cdot (8,5)^2 + 0,2\,(9.5)^2 - (7,65)^2 = 60,25 - 58,5225 = 1,73 \cdot 10^4$ DA

- l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1,73} \simeq 1,31$

(0,5)

moins de	Ni	Fi
0,25	0,25	0,25
5	0	0
6	10	0,1
7	40	0,4
8	55	0,55
9	80	0,8
10	100	1



Courbe Cumulative des effectifs Cumulés.

* Le mode et la médiane,

$$M_o = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} a$$

0,75

la classe modale est $[6, 7[$

$\Delta_1 = 30 - 10 = 20$

$\Delta_2 = 30 - 15 = 15.$

$a = 1 = 7 - 6 = 1.$

$$M_o = 6 + \frac{20}{20+15} \cdot 1 = 6 + \frac{20}{35} = 6,57142 \cdot 10^4 \cdot DA$$
$$= 65714,2 \ DA.$$

$$M_e = L_i + \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n<Me} n_i}{n_{me}} a$$

$n/2 = 50$, la classe médiane est $[7, 8[$

0,75

$$M_e = 7 + \frac{50 - 40}{15} \cdot 1 = 7 + \frac{10}{15} = 7,66666 \, 10^4 = 76666.6 \ DA$$

* Intervalle inter quantiles.

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{n}{4} - \sum_{i=1}^{i<nQ1} n_i}{n_{Q_1}} \cdot a$$

$n/4 = 25$. la classe de Q_1 est $[6, 7[$.

$$= 6 + \frac{25 - 10}{30} 1 = 6 + \frac{15}{30} = 6 + 0,5 = 6,5 \cdot 10^4 \cdot DA.$$
$$= 65000 \ DA$$

0,75

2

$$Q_3 = l_i + \frac{\frac{3n}{4} - \sum_{i=1}^{n_{Q_3}-1} n_i}{n_{Q_3}} \cdot a \qquad \frac{3n}{4} = 75$$, la classe de Q_3 est $[8, 9[$

0,75

$$= 8 + \frac{75 - 55}{25} \cdot 1 = 8 + \frac{20}{25} = 8,8 \cdot 10^4 \text{ DA} = 88\,000 \text{ DA}$$

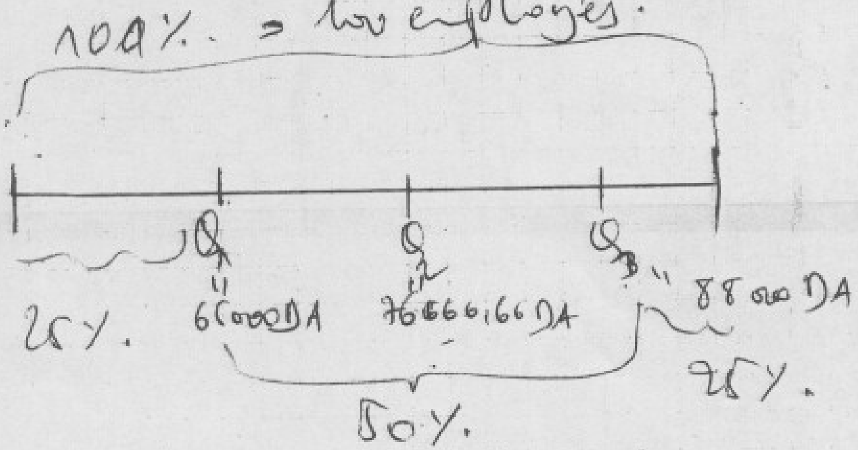
. Interprétation : Intervalle interquartile est 0,75

$[Q_1, Q_3] = [65000, 88000]$ DA

25% des employés sont payés moins de 65000 DA.

25% " " plus de 88 000 DA

et 50% " " entre 65000 et 88000.



50% sont payés moins de 76666,66 D

50% " plus de 76666,66 D