Corrigé de l'examen

27/05/14.

Exo-1 : Matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\underline{Ax = b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} -3x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 . \quad 0{,}25$$

0,25

$|A| \neq 0 \longrightarrow$ Le système (S) est de Cramer, il admet une seule solution et $rg(A) = 3$ 0,25

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1 = x} \quad 0{,}5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = 0 = y \quad (L_1 = -L_3) \quad 0{,}5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \frac{4}{2} = 2 = z \quad 0{,}5$$

0,25

La solution du système est $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

2) La diagonalisation de A.

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$

0,75

Les vp de A sont : $\begin{cases} \lambda = -1 \text{ et de multiplicité } 2 & 0,25 \quad 2 \; 0,25 \\ \lambda = 2 \quad 0,25 & 1 \end{cases}$

Les $\overrightarrow{Vp}$:

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tq $(A - \lambda I_3)X = 0$

pour $\lambda = -1$:

$(A - \lambda I_3)X = (A + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5 . $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5

sont les $\overrightarrow{Vp}$ associés à $\lambda = -1$ qui est ~~d~~ double $\longrightarrow$ A est diagonalisable.

pour $\lambda = 2$:

$(A - 2 I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & (2) \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 & (3) \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow x_1 = -x_2$

(1) $\Leftrightarrow -5x_1 + 2x_1 - 2x_3 = 0 \longrightarrow -3x_1 = 2x_3 \longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_3 \longrightarrow x_3 = -\frac{3}{2}x_1$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix}$. $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 0,5 associé à $\lambda = 2$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 0,25 . $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 0,5

$A^n = ?$ on a : $A^n = P D^n P^{-1}$. 0,25

$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ 0,25 . D est une matr. diagonale.

2

$P^{-1} = ?$. $|P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = (1)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} \neq$ 0,25

P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\,{}^tC_P = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$A^n = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}(-1)^{n+2} - 2^n & \frac{(-1)^{n+1}}{2} + (-1)^{n+2}\cdot\frac{3}{2} - 2^n & (-1)^{n+2} - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & \frac{(-1)^n}{2} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + 3\,2^{(n-1)} & \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + 3\,2^{(n-1)} & 3\,2^{n-1} \end{pmatrix}$$ 0,75

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(-1)^{n+2} - \frac{1}{3}2^{n+1} & \frac{(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^{n+2} - \frac{2^{n+1}}{3} & \frac{2(-1)^{n+2}}{3} - \frac{2^n}{3} \\ \frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1} & \frac{(-1)^n}{3} + \frac{1}{3}2^{n+1} & \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

) D'après le Théorème de Cayley-Hamilton on a :

$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

Toute matrice est solution de son polynôme caractéristique

alors $-A^3 + 3A + 2I_3 = 0$ 0,5

on a : $A^3 - 3A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A^2 - 3I_3) = 2I_3 \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3)$ 0,5

3.

$x'''(t) - 2x''(t) - x'(t) + 2x(t) = 0$ (4)

a : $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ [Toutes les racines sont parmi $(\pm 1, \pm 2)$]
0,5

es racines de ce polynôme sont : $\lambda_1 = -1$ (0,25), $\lambda_2 = 1$ (0,25) et $\lambda_3 = 2$ (0,25)

$-2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$

a solution de l'eqt est :

$x(t) = Q_1(t) e^{\lambda_1 t} + Q_2(t) e^{\lambda_2 t} + Q_3(t) e^{\lambda_3 t}$. 0,25

Toutes les vp sont de multiplicités 1. ($d^\circ Q_i <$ l'ordre de multip de λ_1) 0,25

les degrés des polynômes sont tous de degré 0.

$Q_1(t) = C_1$, $Q_2(t) = C_2$, $Q_3(t) = C_3$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

d'où : $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{2t}$. $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$
0,25

Exo 2 :

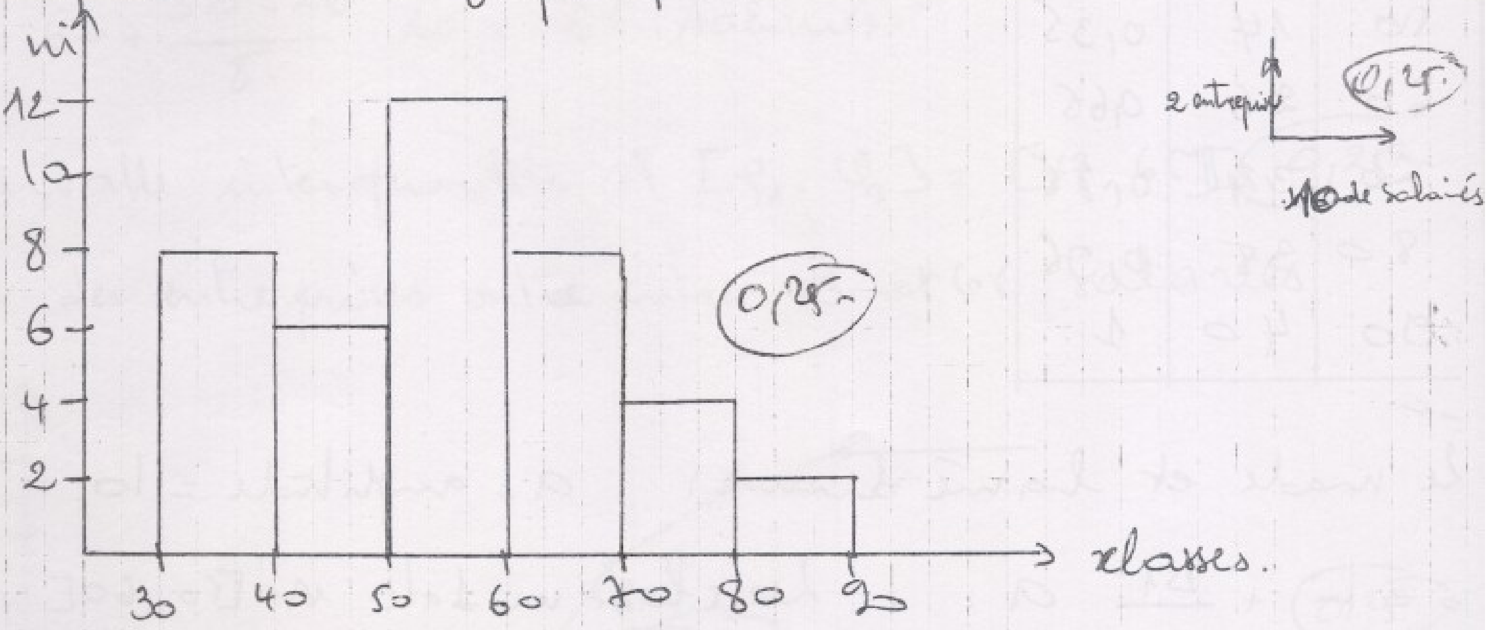
Classes	n_i	f_i	C_i
[30, 40[	8	0,20	35
[40, 50[	6	0,15	45
[50, 60[	12	0,30	55
[60, 70[	8	0,20	65
[70, 80[	4	0,10	75
[80, 90[	2	0,05	85
Total	40	1	

La population est : les entreprises 0,25
La taille est : 40 entreprises 0,25
individu : une entreprise 0,25

. Le caractère étudié : le nombre de salariés de chaque entreprise. (0,25)

sa nature : caractère quantitatif continu. (0,25)

Représentation graphique.



Histogrammes des effectifs (0,25)

3) * La moyenne : $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_i n_i c_i$ (0,75)

$= \frac{1}{40} (8.35 + 6.45 + 12.55 + 8.65 + 4.75 + 2.85) = 55.$ salariés

$(280 + 270 + 660 + 520 + 300 + 170) = \frac{2200}{40}$

* La variance : $V(x) = \frac{1}{n} \sum n_i c_i^2 - \overline{x}^2$ (0,75)

$= \frac{1}{40} (8.35^2 + 6.45^2 + 12.55^2 + 8.65^2 + 4.75^2 + 2.85^2) - (3025)$

$(9800 + 12150 + 36300 + 33800 + 22500 + 14450)$

$= \frac{1}{40} (129000) - 3364 = 3225 - 3025 = 200$

* L'écart type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{200} = 14,14$ (0,25)

(5)

...ms de	N_i	F_i
0,25	0,25	0,25
30	0	0
40	8	0,2
50	14	0,35
60	26	0,65
70	34	0,85
80	38	0,96
90	40	1.

Le mode et la médiane : a = amplitude = 10.

$\ldots = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\, a$ . . La classe modale : est $[50, 60[$.

0,75

$\ldots = 50 + \frac{6}{6+4}\, 10 = 56$ salariés. $\Delta_1 = 12 - 6 = 6$

$\Delta_2 = 12 - 8 = 4$.

$$M_e = L_i + \frac{n/2 - \sum_{i=1}^{n_i < n_{me}} n_i}{n_{me}} \cdot a$$ 0,75

La classe médiane est : $[50, 60[$.

$\frac{n}{2} = 20$.

$$M_e = 50 + \frac{20 - 14}{12} \cdot 10 = 56 \text{ salariés}$$

Intervalle interquantile.

$$Q_1 = L_i + \frac{n/4 - \sum_{i=1}^{i < n_{Q_1}} n_i}{n_{Q_1}} \cdot a \qquad . n/4 = \frac{40}{4} = 10.$$

0,75 .

La classe de Q_1 est : $[40, 50[$.

$$Q_1 = 40 + \frac{10 - 8}{6}\, 10 = 43,33 \simeq 43 \text{ salariés}.$$

$$Q_3 = L_i + \frac{\frac{3n}{4} - \sum_{i=1} n_i}{n_{Q_3}} \cdot a \qquad \frac{3n}{4} = 30.$$

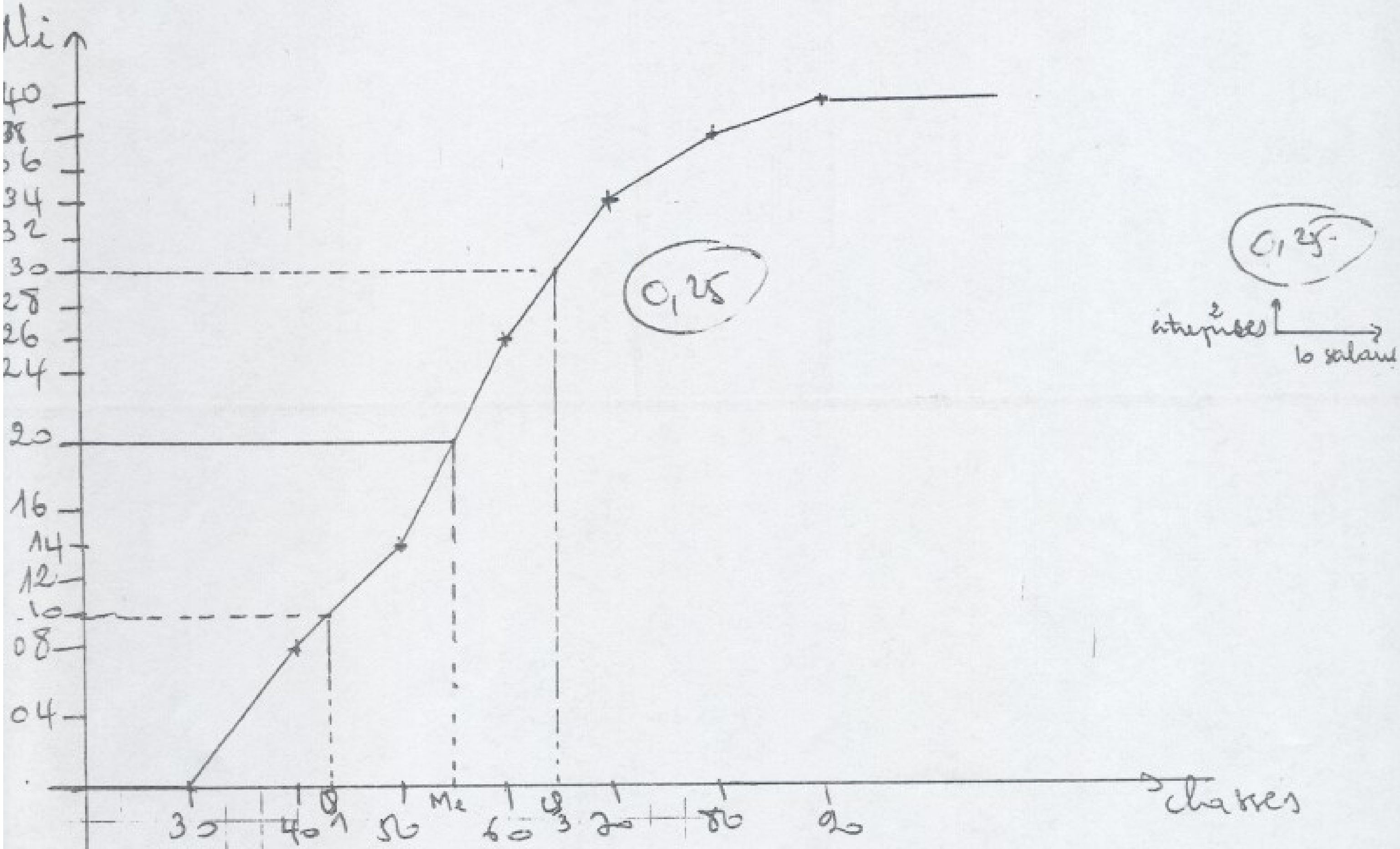
0,75

La classe de Q_3 est [60, 70[.

$$Q_3 = 60 + \frac{30 - 26}{8} 10 = 65 \text{ salariés.}$$

intervalle interquartile est $[Q_1, Q_3] = [43, 65]$. 0,25

50% des entreprises ont entre 43 et 65 salariés.



La Courbe Cumulative des effectifs Cumulés.

0,25

Fi

7

La Courbe Cumulative peut être tracé par $\boxed{Fi}$ en fonction des Classes.