Le 26/01/2014

Corrigé de l'Examen
Mathématiques

Exo n° 1 : soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & \text{si } x \leq 0 \\ 2 \cdot \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1/ la continuité :

$x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ définie et continue sur $\mathbb{R}$, (0,5)
donc continue sur $]-\infty, 0[= \mathbb{R}_-^*$

$x \longmapsto 2 \cdot \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$ définie et continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$
donc continue sur $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ (0,5)

Au point 0 : on a $f(0) = \ln(0+\sqrt{1+0^2}) = \ln 1 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln 1 = 0. \quad (0,5)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$\overset{R.H}{=} \lim_{x \to 0^+} 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 0. \quad (0,5)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \quad (0,5)$$

donc f est continue en 0

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ la dérivabilité en 0 : on a $f(0) = \ln 1 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$\overset{R.H}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1 \cdot (x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}}{\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 = f'_g(0) \quad 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \cdot \frac{x-\ln(1+x)}{x}}{x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$\overset{R.H}{=} \cancel{2} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{\cancel{2}x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 = f'_d(0) \quad 1$$

$f'_g(0) = f'_d(0)$ donc f est derivable en 0. 0,5

3°/ $\lim_{x \to -\infty} (x+\sqrt{1+x^2}) = -\infty + \infty$ F.I

on multiple par le conjugae, nous trouvons

$$\lim_{x \to -\infty} (x+\sqrt{1+x^2}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{(x-\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-(1+x^2)}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}} \quad 0,5$$

$$= \frac{-1}{-\infty} = 0$$

En deduire $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$= \ln 0 = -\infty \quad 0,5$$

4°/ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x} = \frac{+\infty - \infty}{\infty}$ F.I

R.H

$= \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1} \right)$

$= \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \left(1 - \cancel{\frac{1}{1+x}}^{0}\right)$

$= 2$ ①

---

§ **Exo n°2 :** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$$

1°/ $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

on a : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$ ①

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

$= e$. ①

Donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})} & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ ①

2/ la Parité de g : on a $D_g = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ (on a la symetrie de D_g). 1

$$g(-x) = e^{-\frac{1}{x}\ln(-x+\sqrt{1+x^2})}$$
$$= e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)}$$
$$= e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}$$
$$= e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$ 1,5
$$= g(x)$$ 0,5

d'où g est une fonction paire.

---

§ **Exo n° 3** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x}\, dx$$

1/ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$, Par changement de variable 0,5
on pose : $t = \sqrt{1-x} \Longrightarrow t^2 = 1-x$ 0,5
$\Longrightarrow x = 1-t^2$
$\Longrightarrow dx = -2t\, dt$ 0,5

si $x = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{1-0} = 1$ 0,5
si $x = 1 \Longrightarrow t = \sqrt{1-1} = 0$ 0,5

$$I_0 = \int_1^0 t \cdot (-2t)\, dt = -2\int_1^0 t^2\, dt$$ 0,5
$$I_0 = 2\int_0^1 t^2\, dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$ 0,5
$$\boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$$ 0,5

2°/ En utilisant l'intégration par parties, pour tout $n \geq 1$
posons : $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$
$g'(x) = \sqrt{1-x} \Longrightarrow g(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 1

alors : $I_n = \left[-\frac{2}{3} \cancel{x^n} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{\frac{3}{2}} \, dx$ 0,5

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x) \sqrt{1-x} \, dx \quad 0,5$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 (x^{n-1} - x^n) \sqrt{1-x} \, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} \, dx - \frac{2n}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$$

0,5

$$I_n = \frac{2n}{3} I_{n-1} - \frac{2n}{3} I_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad I_n + \frac{2n}{3} I_n = \frac{2n}{3} I_{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2n+3}{\cancel{3}} I_n = \frac{2n}{\cancel{3}} I_{n-1} \quad 0,5$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2n+3) I_n = 2n \, I_{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} .$$

———— o ———— o ————

Remarque : R. H c'est la règle de l'Hospital