# Corrigé de l'Examen de Remplacement mathématiques

le 05/02/2014

## EXO n° 1 : Soit $f$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ x\ln x - x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1°/ La continuité : $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$. (0,5)

$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc continue sur $]-\infty,0[$. (0,5)

$x \mapsto x\ln x - x$ définie et continue sur $]0,+\infty[$. (0,5)

au point $0$ la fonction $f$ n'est pas définie donc automatiquement n'est pas continue en $0$.

Conclusion : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. (0,5)

2°/ Le prolongement par continuité :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \quad (0,5)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x - x) = 0 \quad (0,5)$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, alors $f$ est prolongeable par continuité en $0$ et $\tilde{f}$ définie par (0,5)

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x=0, \\ x\ln x - x & \text{si } x>0. \end{cases} \quad (0,5)$$

3°/ La dérivabilité de $\tilde{f}$ : $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$ et $\tilde{f}(0)=0$ (0,5)

$x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc dérivable sur $]-\infty,0[$. (0,5)

$x \mapsto x\ln x - x$ définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. (0,5)

Au point $0$ :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} y e^{y} = 0 \quad f'_g(0) \quad (0,5)$$

(on pose $y=\frac{1}{x}$, si $x\to 0^-$ alors $y\to -\infty$)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x - x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} (\ln x - 1)$$
$$= -\infty . \quad 0{,}5$$

alors $\mathcal{F}$ n'est pas dérivable en 0.

conclusion : $\mathcal{F}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$. 0,5

---

## EXON° 2 : Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3 - 1}$$

1°/ le domaine de définition de $f$ : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$. 0,5

la parité : Soit $x = -1 \in \mathcal{D}_f$ alors $-x = 1 \notin \mathcal{D}_f$

donc, on a pas la symétrie de $\mathcal{D}_f$ 0,5

d'où la fonction $f$ ni paire ni impaire.

2°/ les Extrémums :

$$f'(x) = \frac{(2x^4)'(x^3-1) - (2x^4)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{8x^3(x^3-1) - 2x^4(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{8x^6 - 8x^3 - 6x^6}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{2x^6 - 8x^3}{(x^3-1)^2} \quad 1$$

$$= \frac{2x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2} = 0 \iff 2x^3(x^3-4) = 0 \quad 0{,}5$$

$$\iff \begin{cases} 2x^3 = 0 \\ \text{ou} \\ x^3 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

On utilise le Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $\sqrt[3]{4}$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ $-$ | ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $f(0)=0 \searrow -\infty$ | ‖ $+\infty \searrow$ | $f(\sqrt[3]{4})$ | $\nearrow +\infty$ |

1,5

donc $f$ admet deux extrêmums (1)

le point $(0,0)$ est un maximum et le point $(\sqrt[3]{4}, f(\sqrt[3]{4}))$ est un minimum.

3°/ $$f''(x) = \left(\frac{2x^6-8x^3}{(x^3-1)^2}\right)' = \frac{(2x^6-8x^3)'(x^3-1)^2 - (2x^6-8x^3)\left[(x^3-1)^2\right]'}{(x^3-1)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(12x^5-24x^2)(x^3-1)^2 - (2x^6-8x^3)(2(x^3-1)\cdot 3x^2)}{(x^3-1)4}$$

$$= \frac{12x^2(x^3-2)(x^3-1) - 12x^2(x^6-4x^3)}{(x^3-1)^3}$$

$$= \frac{12x^2\left[(x^3-2)(x^3-1) - (x^6-4x^3)\right]}{(x^3-1)^3}$$ (1)

$$= \frac{12x^2(\cancel{x^6}-3x^3+2-\cancel{x^6}+4x^3)}{(x^3-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{12x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}}$$

---

**EXO n° 3** : On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ , $\forall n \in \mathbb{N}$

1°/ $$I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1}+1$$
$$= -\frac{1}{e}+1$$

$$\boxed{I_0 = \frac{e-1}{e}}$$ 1

(c) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$ , Par intégration par partie

on pose : $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{-x} \Longrightarrow g(x) = -e^{-x}$ 0,5

$$I_1 = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$ 0,5

$$I_1 = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$ 0,5

$$I_1 = \left(-e^{-1} + 0\right) + \left(-e^{-1} + 1\right)$$

$$I_1 = -2e^{-1} + 1 \Longleftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{e-2}{e}}$$ 0,5

2°/ En utilisant l'intégration par partie pour calculer $I_n$ 0,5

posons : $f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x}$

$g'(x) = x^n \Longrightarrow g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 1

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx$$ 1

$$I_n = \frac{1}{n+1} e^{-1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$ 0,5

d'où : $$I_n = \frac{1}{n+1}\left(e^{-1} + I_{n+1}\right)$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{e} + I_{n+1}\right)}$$ 1