Corrigé de l'examen de Rattrapage 12/06/14 2ème LMD.

Exo n°1 (3,5pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calcul de A^3 et A^4.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A^3 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

2) En déduire:

a) l'inverse de A.

On a: $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I_3$ (0,5)

Donc, il existe une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ tq, (0,5)

$$A \cdot B = B \cdot A = I_3, \text{ avec } B = A^2 = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a:
$A^0 = I_3$
$A^1 = A$
$A^2 = A^2$
$A^3 = I_3$
$A^4 = A$
$A^5 = A^2 \cdot A^3 = A^2$
$A^6 = A^3 \cdot A^3 = I_3$
$\vdots$

$$A^n = \begin{cases} A^{3k} & (0,5) \\ A^{3k+1} & (0,25) \quad \forall k \\ A^{3k+2} & (0,25) \end{cases}$$

Exercice 2 (8,0) pts $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$ (6)

1) $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & m-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)$$

donc $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)$ (1)

2) On a $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda) = 0$

les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = m$.

On distingue (3) cas : 1) $m \neq 1$ et $m \neq 2$, $m \in \mathbb{R} - \{1$

2) $m = 1$

3) $m = 2$.

1er cas : $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Dans ce cas, A admet (0,5)

(3) vp distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = m$, Donc

(0,5) A est diagonalisable. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.

2ème cas : si $m = 1$. A admet (2) v propres,

$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ est de multiplicité } 2 & (0,25) \\ \lambda_3 = 2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1 & (0,25) \end{cases}$

On doit chercher les vp.

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tq : $[A - \lambda I_3] X = 0$ $\left\{ A_{m=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & 2 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$

1) pour $\lambda = 1$.

$$(A - I_3) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 & — (1) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 & — (2) \\ x_1 - x_2 = 0 & — (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ (3) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

0,5

Donc le $\vec{vp}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le

$\vec{vp}$ associé à $\lambda = 1$ qui est double

0,25 Donc A n'est pas diagonalisable.

3ème cas, $m = 2$: A admet 2 valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 2 \text{ est de multip}^{té}\ 2 & 0,25 \\ \lambda_3 = 1 \quad " \quad 1 & 0,25 \end{cases} \qquad A_{m=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les $\vec{vp}$: $(A - \lambda I_3) X = 0$

* pour $\lambda = 2$. $(A - 2 I_3) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_3.$$

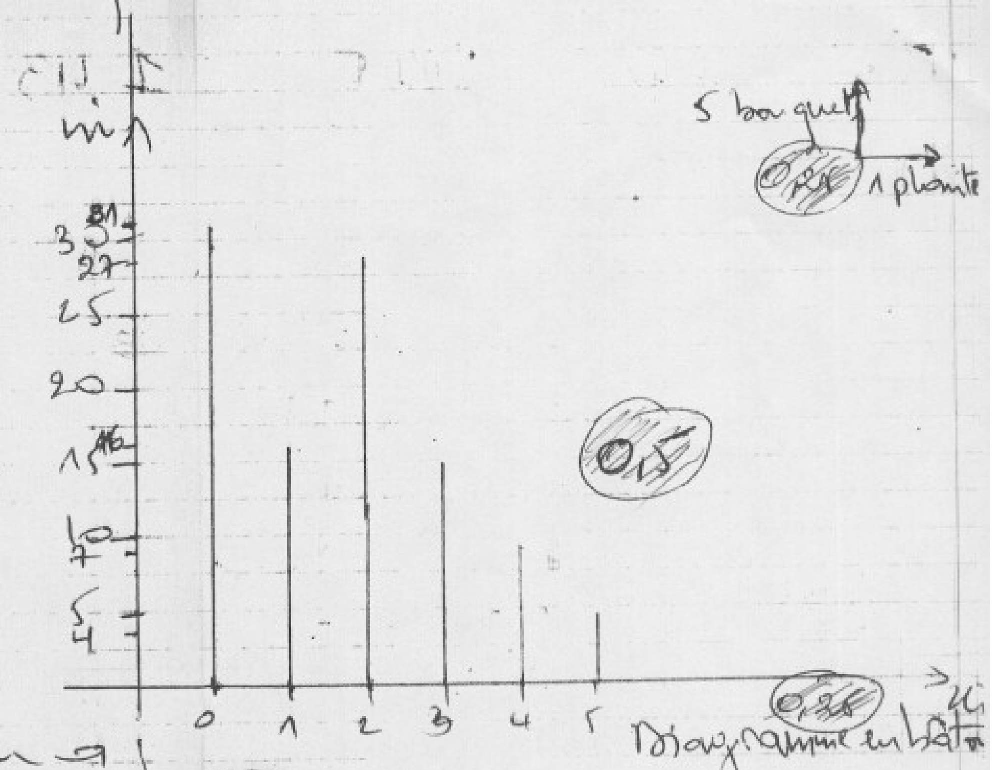
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

0,5   0,25

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les $\vec{vp}$ associés à $\lambda = 2$.

Exo 3 : Statistiques (1)

x_i	n_i	n_i	f_i
0	31	31	0,31
1	n_2	16	0,16
2	27	27	0,27
3	n_4	15	0,15
4	7	7	0,07
5	4	4	0,04
Σ	100	100	1



1) n_2 et n_4 ? on a :

0,5

$$\begin{cases} \sum_i n_i = 100 = 31 + n_2 + 27 + n_4 + 7 + 4 = 69 + n_2 + n_4 \\ \overline{x} = 1,63 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{1}{100}(0.31 + 1.n_2 + 2.27 + 3.n_4 + 4.7 + 5.4) \end{cases}$$

0,5

$$= \frac{1}{100}(n_2 + 102 + 3n_4) = 1,63$$

Donc : $\begin{cases} n_2 + n_4 = 100 - 69 = 31 & \text{--- (1)} \\ n_2 + 3n_4 = 163 - 102 = 61 & \text{--- (2)} \end{cases}$

(2) - (1) $\Leftrightarrow$ $2n_4 = 30 \rightarrow \boxed{n_4 = 15}$ 0,5

(1) $\Rightarrow$ $n_2 = 31 - 15 = 16. \rightarrow \boxed{n_2 = 16.}$ 0,5

2) La variance et l'écart type :

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \overline{x}^2$$ (1)

$$= \left(0^2 . 0,31 + 1^2 . 0,16 + 2^2 . 0,27 + 3^2 . 0,15 + 4^2 . 0,07 + 5^2 . 0,04\right) - 1,6$$

5

Exo 3 : Statistiques (1)

x_i	n_i	n_i	f_i
0	31	31	0,31
1	n_2	16	0,16
2	27	27	0,27
3	n_4	15	0,15
4	7	7	0,07
5	4	4	0,04
Σ	100	100	1

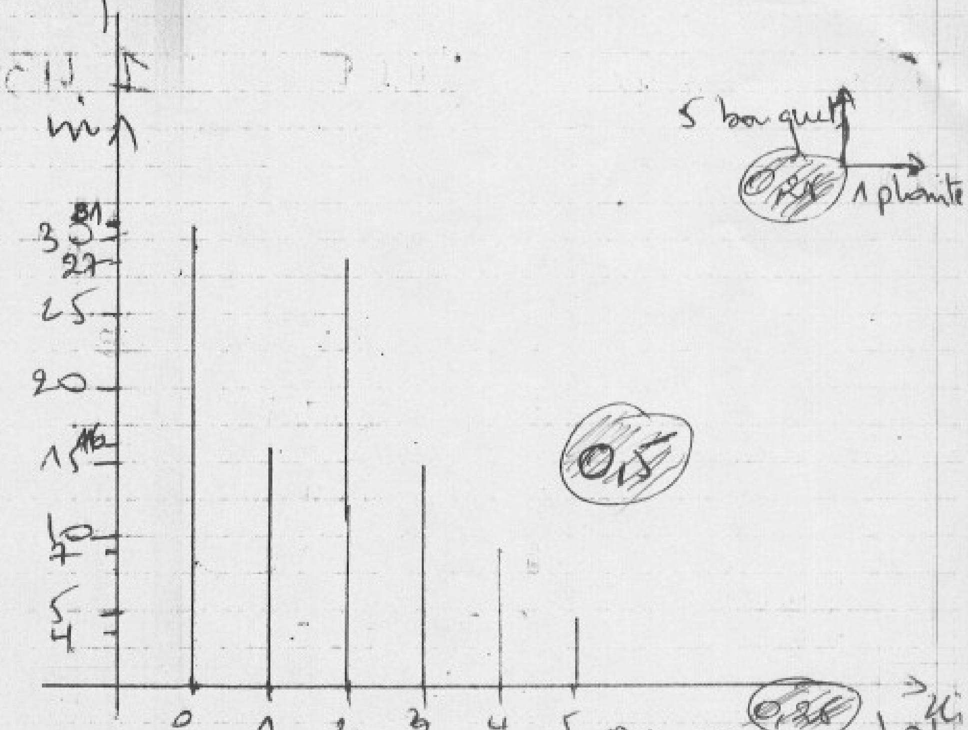


Diagramme en bâton

1) n_2 et n_4 ? On a :

0,5

$$\begin{cases} \sum_i n_i = 100 = 31 + n_2 + 27 + n_4 + 7 + 4 = 69 + n_2 + n_4 \\ \overline{x} = 1,63 = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{1}{100}(0 \cdot 31 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot n_4 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 4) \end{cases}$$

0,5

$$= \frac{1}{100}(n_2 + 102 + 3n_4) = 1,63$$

Donc : $\begin{cases} n_2 + n_4 = 100 - 69 = 31 & \text{--- (1)} \\ n_2 + 3n_4 = 163 - 102 = 61 & \text{--- (2)} \end{cases}$

(2) − (1) $\Leftrightarrow$ $2n_4 = 30 \longrightarrow \boxed{n_4 = 15}$ 0,5

(1) $\Rightarrow$ $n_2 = 31 - 15 = 16 \longrightarrow \boxed{n_2 = 16.}$ 0,5

2) La variance et l'écart type :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \overline{x}^2$$ 1

$$= \left(0^2 \cdot 0,31 + 1^2 \cdot 0,16 + 2^2 \cdot 0,27 + 3^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,07 + 5^2 \cdot 0,04\right) - 1,63^2$$

$V(x) = 4,71 - 2,66 = 2,05$

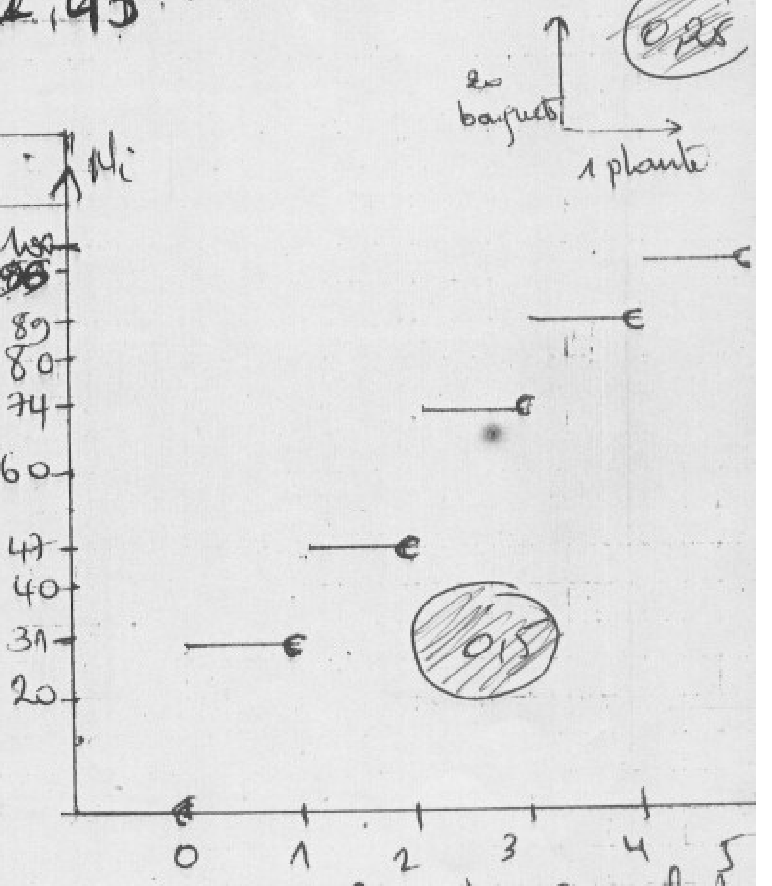
0,5

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2,05} = 1,43$

3°)

moins de	Ni	Fi
0	0	0
1	31	0,31
2	47	0,47
3	74	0,74
4	89	0,89
5	96	0,96
plus de 5	100	1

0,25 0,25 0,25



Courbe Cumulati

0,125

5) Le mode et la médiane :

le plus grand effectif est : 31 qui correspond à ~~tra~~ la modalité 0. donc le mode est :

$M_o = 0$.

0,75

. On a : n est pair n = 100 donc $n/2 = 50$

la médiane est l'observation n° 50 + l'observation n° 51 devisé par 2. $M_e = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} =$

$x_{50} = 2$, $x_{51} = 2$, $M_e = \frac{2+2}{2} = 2$.

1

6