

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي

Université Abderrahmane Mira
Béjaïa



جامعة عبد الرحمان ميرة
بجاية

Faculté de Technologie Département de Technologie

Rappels théoriques Travaux Pratiques de physique 1 LMD & ING

Mesure et calculs des incertitudes
Chute libre
Plan incliné
Pendule simple
Pendule oscillant
Moment d'inertie

Equipe pédagogique

Année Universitaire 2025/2026

Mesures et calculs des incertitudes

1. Objectifs

- Maîtriser l'utilisation des instruments de base de mesure de longueur.
- Apprendre à estimer une erreur de mesure : absolue, relative et précision
- Savoir représenter un résultat de mesure.

2. Théorie

La physique c'est l'art d'apprécier l'incertitude. La mesure d'une grandeur physique, qu'elle soit directe ou indirecte, n'est jamais parfaite, des incertitudes d'origine humaine ou instrumentale peuvent intervenir. Selon leurs types, systématiques ou accidentelles, on procède à les minimisées et/ou les éliminées :

- Incertitudes accidentelles :** elles sont aléatoires et imprévisibles, d'origine perturbatrice, qu'on peut minimisées par répétition de mesures, calcul de moyenne arithmétique et traitement statistique si nécessaire.
- Incertitudes systématiques :** elles sont dues à un état vieilli et/ou usé des composants de mesures, comme le réglage du zéro ou les graduations d'une règle ou un outil de mesure inadapté. Généralement un bon choix d'instruments, préalablement étalonné est bénéfique.

2. Évaluation de l'incertitude

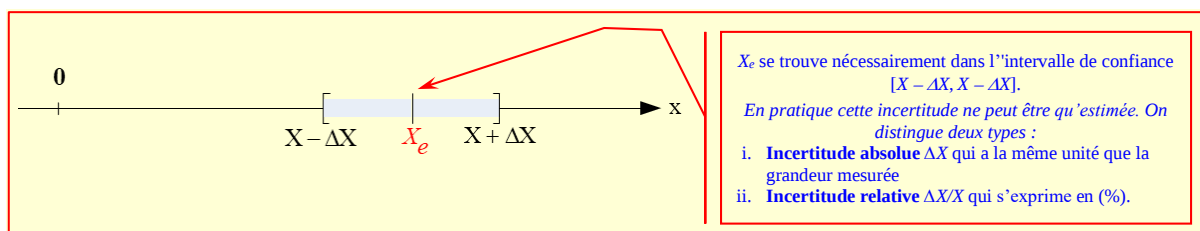
Chaque mesure faite renferme une erreur de mesure :

1. L'erreur de mesure est l'écart entre la valeur mesurée X et la valeur exacte qui est inconnue X_e , ou une valeur de référence. On note l'erreur absolue δX (Eq. 1).

$$\delta X_i = X_i - X_e \quad (1)$$

On appelle incertitude de mesure ΔX , la limite supérieure de la valeur absolue de l'écart entre la valeur mesurée et la valeur exacte de la mesurande notée ΔX (Eq. 2).

$$\Delta X = \sup |\delta X| = \sup |X_i - X_e| \quad (2)$$



1. L'incertitude absolue est l'écart maximal entre la mesure X et la valeur exacte X_e . Pour n mesurage, on estime la moyenne (Eq. 3) qui servira à l'évaluation de l'incertitude absolue (écart type) (Eq. 4).

$$X_{moy.} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n} \quad (3)$$

$$\Delta X_{moy.} = \frac{\sum |X_i - X_{moy.}|}{n} = \frac{\sum \Delta X_i}{n} \quad (4)$$

2. L'incertitude relative ε représente l'importance de l'erreur par rapport à la grandeur mesurée (Eq. 5). C'est commode pour chiffrer la précision d'une mesure.

$$\varepsilon = \frac{\Delta X_{moy.}}{X_{moy.}} [/] \quad (5)$$

3. Evaluation des incertitudes pour les méthodes de mesures directes

L'évaluation des incertitudes pour les méthodes de mesure directes comprend des étapes essentielles (Eq.6).

- i. Il faut décrire clairement les méthodes utilisées pour calculer le résultat de mesure et son incertitude, en tenant compte des observations expérimentales.
- ii. Il est important que l'évaluation de l'incertitude fournisse un intervalle qui englobe une grande partie de la distribution des résultats, et cette incertitude peut être influencée par divers facteurs tels que la précision des instruments de mesure et les conditions expérimentales.

$$\Delta X_{mesures\ directes} = \Delta X_{instrument} + \Delta X_{lecture} \quad (6)$$

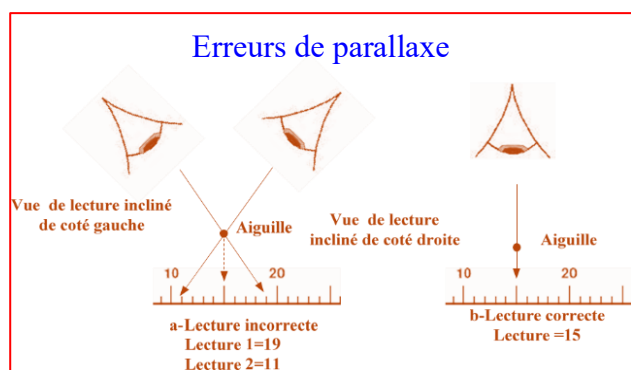
3.1 Cas d'appareil à déviation ; incertitude instrumentale

Elle est due à l'appareil de mesure, elle est fonction de sa précision (Eq.7).

$$\Delta X_{instrument} = \frac{Classe \cdot Calibre}{100} \quad (7)$$

3.2 Cas d'appareillage gradué ; incertitude de lecture

L'incertitude de lecture est due soit à une mauvaise vue, soit de mauvaises conditions de la lecture.



Il est recommandé de toujours vérifier les informations pertinentes pour assurer la rigueur des résultats. L'erreur de lecture est estimable à 1 de division, d'où l'incertitude absolue de lecture (Eq. 8).

$$\Delta X_{lecture} = \frac{1 \cdot \text{Calibre}}{4 \cdot \text{Echelle}} \quad (8)$$

L'incertitude absolue totale pour les appareils de mesures à déviations devient (Eq. 9) :

$$\Delta X_{totale} = \Delta X_{instrument} + \Delta X_{lecture} = \frac{\text{Classe} \cdot \text{Calibre}}{100} + \frac{1 \cdot \text{Calibre}}{4 \cdot \text{Echelle}} \quad (9)$$

4. Evaluation des incertitudes pour les méthodes de mesures indirectes

La mesure est appelée indirecte si la grandeur mesurée f est calculée à partir des résultats des mesures directes de plusieurs grandeurs intermédiaires (X, Y, Z). Cette méthode consiste à utiliser deux ou plusieurs appareils de mesure. La grandeur inconnue est déterminée par une expression mathématique qui fait intervenir les grandeurs mesurées (Eq.10).

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial f}{\partial Z} \Delta Z \quad (10)$$

1. Cas de la somme : $f(X, Y) = X + Y \Rightarrow \Delta f = \Delta X + \Delta Y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y}$
2. Cas d'une soustraction : $f(X, Y) = X - Y \Rightarrow \Delta f = \Delta X + \Delta Y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X - Y}$
3. Cas d'un produit : $f(X, Y) = X \cdot Y \Rightarrow \Delta f = Y \Delta X + X \Delta Y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$
4. Cas d'un rapport : $f(X, Y) = \frac{X}{Y} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{Y} \Delta X + \frac{X}{Y^2} \Delta Y \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$

5. Représentation d'un résultat expérimentale

La représentation d'un résultat expérimentale nécessite la juxtaposition de la valeur mesurée (une moyenne de celle-ci si une étude statistique a été faite), son incertitude absolue, une puissance de 10, si nécessaire, (notation scientifique) et une unité (Eq. 11).

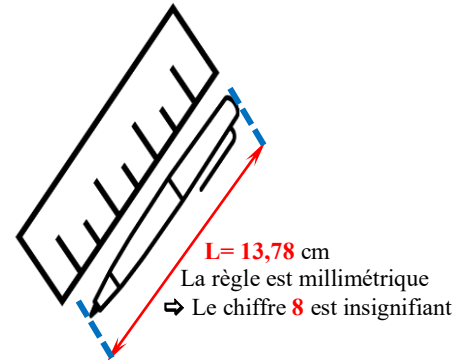
$$X_e = (X \pm \Delta X) 10^n [\text{Unité}] \quad (11)$$

L'incertitude absolue ΔX sera toujours donnée avec **un seul chiffre significatif (si nécessaire arrondir au maximum)**. On ajustera la valeur de la mesure X de manière que son dernier chiffre significatif soit à la même position que celui de la mesure, **même nombres des décimales (si nécessaire arrondir suivant la règle classique ≥ 5)**.

5.1 Chiffres significatifs

Les règles pour déterminer les chiffres significatifs d'un nombre sont les suivantes :

1. Tous les chiffres non nuls sont significatifs. Par exemple, dans le nombre (123,45), tous les chiffres (1, 2, 3, 4, 5) sont significatifs.
2. Les zéros compris entre des chiffres significatifs sont également significatifs. Par exemple, dans le nombre (1002), tous les chiffres (1, 0, 0, 2) sont significatifs, car les zéros sont encadrés par des chiffres non nuls.
3. Les zéros placés avant le premier chiffre non nul ne sont pas significatifs. Par exemple, dans le nombre (0,0045), seuls les chiffres 4 et 5 sont significatifs, donc il y a 2 chiffres significatifs.
4. Les zéros à la fin d'un nombre avec une virgule décimale sont significatifs. Par exemple, dans le nombre (1500,0), tous les chiffres (1, 5, 0, 0, 0) sont significatifs, donc il y a 5 chiffres significatifs.
5. Les chiffres dans les décimales sont tous significatifs. Par exemple, dans (0,004560), les chiffres (4, 5, 6 et 0) sont tous significatifs, donc il y a 4 chiffres significatifs.



0,0025 $\Rightarrow$ 2 chiffres significatifs (2 et 5).

3004 $\Rightarrow$ 4 chiffres significatifs (3, 0, 0, 4).

0,0203 $\Rightarrow$ 3 chiffres significatifs (2, 0, 3).

120,00 $\Rightarrow$ 5 chiffres significatifs (1, 2, 0, 0, 0).

1. Addition et soustraction : Le résultat doit être arrondi en fonction du chiffre le moins précis de l'opération (décimal le plus à gauche). Par exemple ; Avec un exemple ce sera plus simple : $(25,12 + 36,2 + 4,965 + 82,1294 = 148,4144)$ mais (36,2) n'a qu'un seul chiffre après la virgule alors que les autres en ont 2, 3 ou 4. Le résultat final n'a donc qu'un seul chiffre après la virgule (148,4) ; le nombre de chiffres significatifs de chaque terme n'a pas d'importance, c'est le nombre de chiffres après la virgule qui est important.
2. Multiplication et division : Le résultat doit avoir le même nombre de chiffres significatifs que le facteur ayant le moins de chiffres significatifs. Par exemple ; $(6,00 \times 10^{-2} \times 23 = 1,38)$ qui possède 3 chiffres significatifs. Alors qu'il n'en faut que 2, On arrondit donc à 1,4 qui possède 2 chiffre significatifs

Il est important de s'assurer que les résultats sont exprimés avec la précision appropriée dans des contextes scientifiques : une mesure exprimée avec plus de chiffres significatifs implique une plus grande précision.

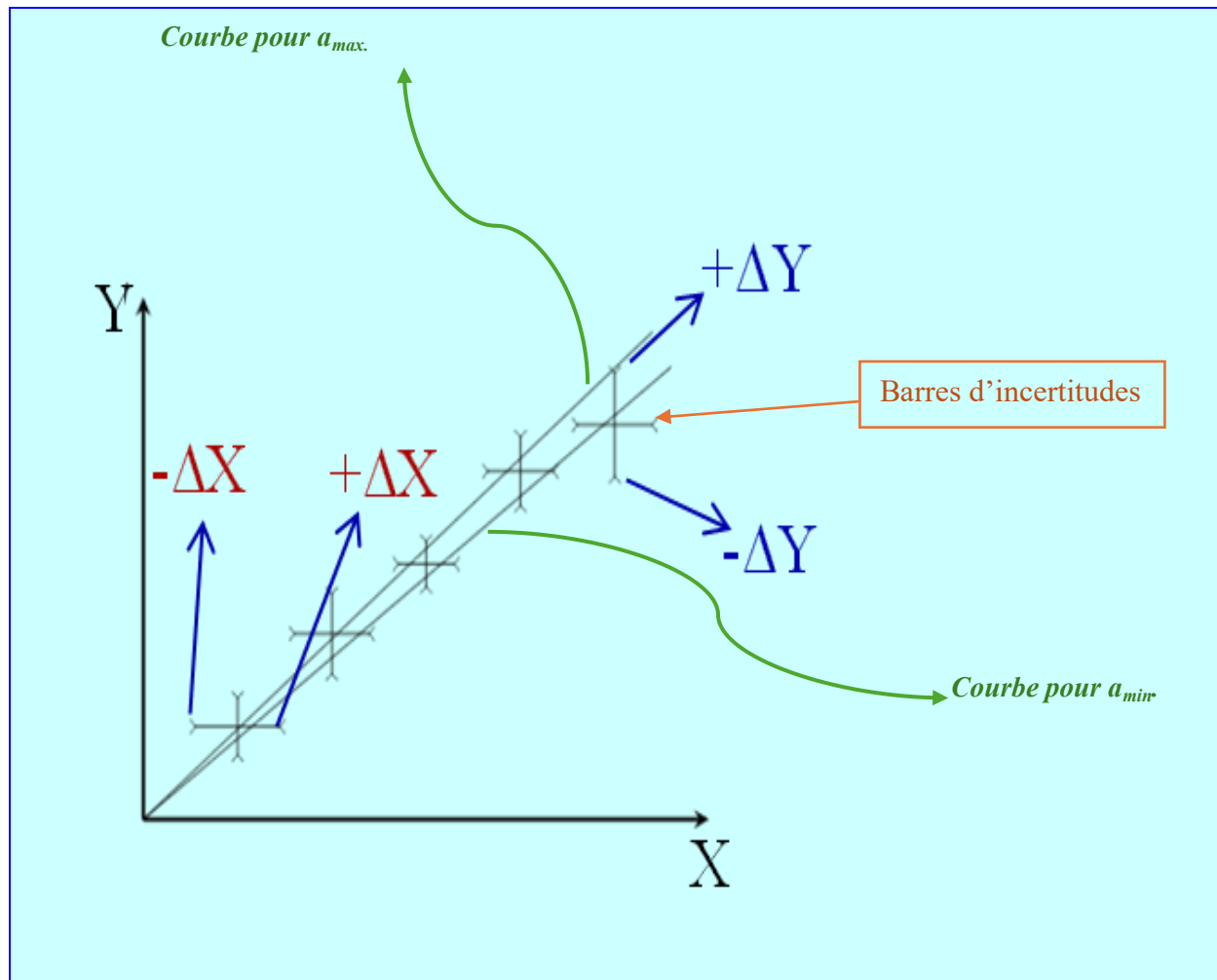
$$X=209,34 \text{ [Unité]}, \text{ avec une incertitude } \Delta X=0,5[\text{Unité}] \Rightarrow X_{\text{exacte}} = (2,1 \pm 0,5)10^2 \text{ [Unité]}$$

Vérification expérimentale d'une loi

Il est souvent demandé en physique, la représentation graphique pour la vérification de la loi théorique.

La droite étant la représentation la plus simple, on cherche à exprimer la loi à tester sous la forme $Y=aX+b$, par exemple en effectuant un changement de variable. On vérifie la linéarité de la droite, et le calcul de la pente de la droite avec son incertitude associée. Le processus est donc le suivant :

1. On relève des couples de valeurs (X, Y) ainsi que leur incertitude $(\Delta X, \Delta Y)$;
2. On reporte les points (X_i, Y_i) sur un graphique, puis on trace les barres d'incertitudes (ΔX horizontale et ΔY verticale) de part et d'autre de ces points ;
3. Si on opère manuellement, on cherche les lignes droites extrêmes de pente $a_{\min}$ et $a_{\max}$ qui passent par les points, en tenant compte des incertitudes.
4. La pente retenue sera déterminée par $a = (a_{\min} + a_{\max}) / 2$
5. L'incertitude sur cette pente sera donnée par $\Delta a = |a_{\max} - a_{\min}| / 2$
6. Dans tous les cas, si à partir de cette pente il faut déterminer une autre grandeur, c'est la formule de propagation des incertitudes qui s'appliquera, en utilisant le Δa déterminée graphiquement.
7. Si les incertitudes sont comparables aux écarts des différents points à la droite, on peut considérer la loi linéaire comme acceptable.

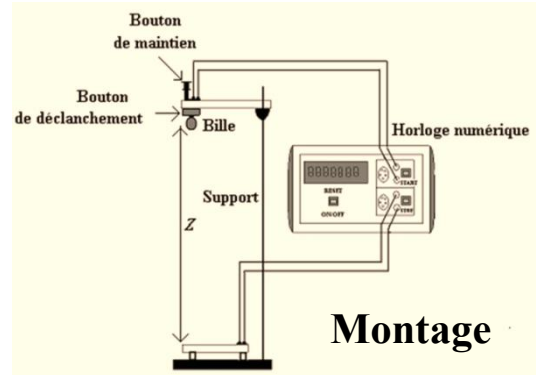


Chute libre

1. Objectifs

- Etudier les lois de mouvement d'un corps en chute libre.
- Calcul de l'accélération de la gravité « g »
- Vérifier la conservation de l'énergie mécanique dans le cas d'une chute libre sans frottement.

Une bille maintenue par aimantation, est lâchée à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale, en appuyant sur le bouton de déclenchement, ce qui provoque le démarrage de l'horloge numérique. La bille tombe suivant une ligne verticale vers le sol. Le point d'impact arrête l'horloge qui mesure la durée de la chute.



2. Théorie

Lors de sa chute libre d'une hauteur Z , un corps ou un projectile de masse « m » est soumis à sa pesanteur $P=mg$, son mouvement est rectiligne uniformément accéléré. En réalité, dans sa chute, le corps est soumis à plusieurs forces simultanément : la poussée d'Archimède qui dépend de sa densité et la résistance de l'air qui dépend de sa forme et de sa vitesse. Dans le présent cas On néglige ces forces par le choix d'un corps dense de faibles dimensions tombant d'une petite hauteur. En utilisant le principe fondamental en dynamique (PFD), soit la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

$$mg = ma \Rightarrow g = \frac{dV(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow V(t) = \int_0^t g dt \quad ; \Rightarrow V(t) = gt + C$$

$$\Rightarrow \text{à } t = 0 ; V = V_0 \Rightarrow C = V_0$$

$$\Rightarrow V(t) = gt + V_0$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{d}{dt} Z(t)$$

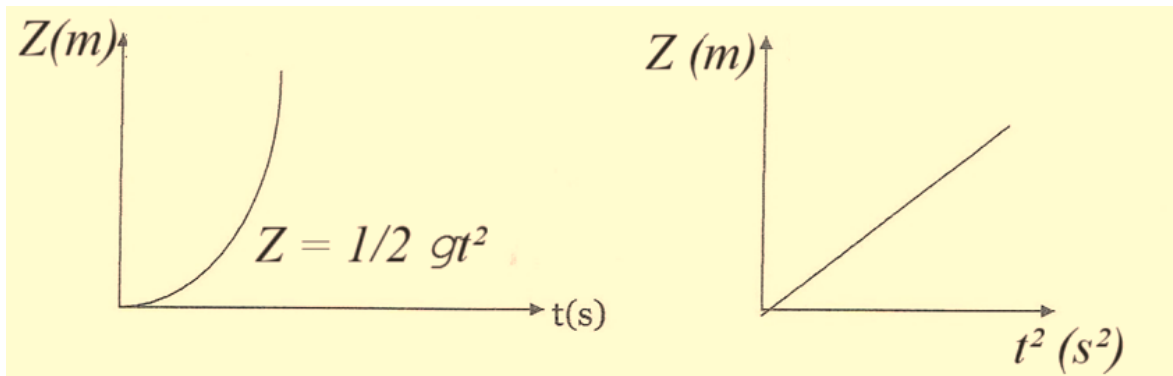
$$\Rightarrow Z(t) = \frac{1}{2} gt^2 + V_0 t + Z_0 \quad (2)$$

Cas d'une chute sans vitesse initiale: à $t = 0$; $Z(0) = 0$ et $V(0) = 0$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow g = \frac{2Z}{t^2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow V(t) = g t \quad (4)$$

Le diagramme des espaces pour la chute libre ([Eq. 2](#)) est dans ce cas une parabole. La deuxième courbe est caractéristique du mouvement rectiligne uniformément accéléré. Cette courbe est une droite décrivant la chute d'un corps sous la seule action de son poids.

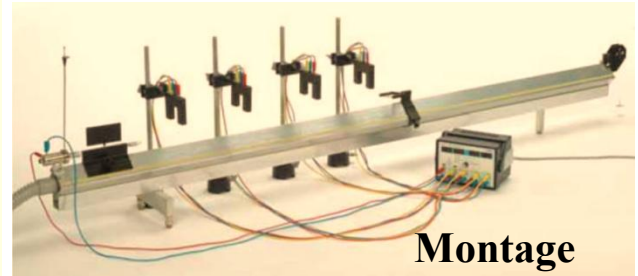


Plan incliné

1. Objectifs

- Analyse des variations de vitesse et d'accélération.
- Étude des caractéristiques du mouvement à vitesse constante.
- Analyse des forces et du mouvement sur un plan incliné.
- Étude expérimentale de la relation entre force, masse et accélération.

Un chariot se déplaçant sur un rail, ce dernier est perforé et laisse passer l'air depuis une soufflerie pour permettre de minimiser jusqu'à élimination des forces de frottement entre le rail et le chariot grâce. Deux barrières optiques permettant le déclenchement et l'arrêt d'un chronomètre qui mesura la durée nécessaire pour que le chariot parcoure une distance X .



2. Théorie

Un corps qui se déplace entre deux points : X_0 (à $t=0$) et X_i (à $t=t_i$) avec une vitesse $\vec{V}$ est soumis à une force $\vec{F}_{\text{extérieure}}$ dérivant d'une quantité du mouvement :

$$\vec{p} = m\vec{V} \quad (1)$$

$$\vec{F}_{\text{extérieure}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \quad (2)$$

Avec $\vec{a}$ est l'accélération produit par cette force $\vec{F}_{\text{extérieure}}$ qui est la somme du poids et du contact ($\vec{P} + \vec{C}$). D'une autre part, la vitesse dérive du déplacement :

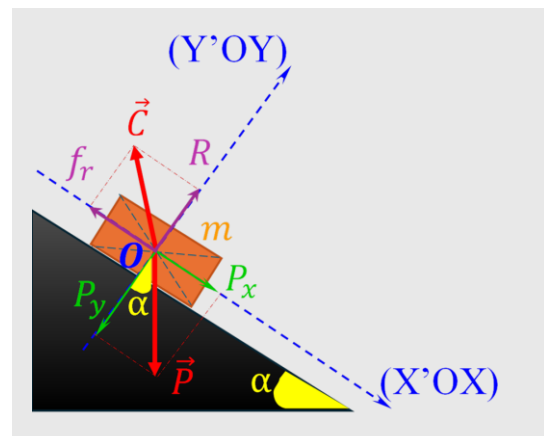
$$\|\vec{r}\| = X = \Delta X_i = |X(t_i) - X(t_0)| \quad (3)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (4)$$

Et la vitesse pour une force constante devient :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}_{\text{extérieure}}}{m} t \quad (5)$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \frac{\vec{F}_{\text{extérieure}}}{m} t dt \quad (6)$$



$$\Rightarrow \int d\vec{r} = \frac{\vec{F}_{\text{extérieure}}}{m} \int t dt \quad (7)$$

à $t=0$: $V(0)=0$ alors $r(0)=0$;

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{F}_{\text{extérieure}}}{m} t^2 \quad (8)$$

Remplaçant (Eq.3) et (Eq.4) dans (Eq.8) :

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \frac{ma}{m} t^2 = \frac{at^2}{2} = Vt \quad (9)$$

Sur un plan incliné d'angle α , le chariot se déplace sans frottement ;

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (10)$$

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \quad (11)$$

Avec : $\vec{P} \begin{pmatrix} P_x = P \cdot \sin\alpha = mg \sin\alpha \\ P_y = -P \cdot \cos\alpha = -mg \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\vec{C} \begin{pmatrix} C_x = f_r = 0 \text{ (dans notre cas)} \\ C_y = R \end{pmatrix}$ et $\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = a \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{\overrightarrow{Proj}}{(X'OX)}: P_x = ma \Rightarrow a = g \sin\alpha \Rightarrow g = \frac{a}{\sin\alpha} \\ \frac{\overrightarrow{Proj}}{(Y'OY)}: -P_y + R = ma \Rightarrow R = mg \cos\alpha \end{cases} \quad (12)$$

Dans le cas d'un plan horizontal :

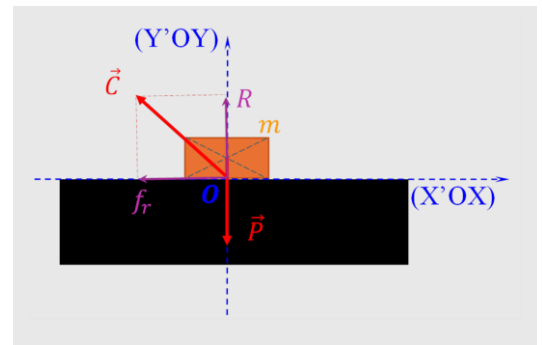
$$\vec{F}_{\text{extérieure}} = m\vec{a} \quad (13)$$

$$\Rightarrow 2mX = F_{\text{extérieure}} t^2 \quad (14)$$

$$\Rightarrow 2mX = mat^2 \quad (15)$$

$$\Rightarrow X = \frac{at^2}{2} \quad (16)$$

$$\Rightarrow V = at \quad (17)$$



Le chariot traverse des distances $X_1, X_2, X_3, \dots$ en $t_1, t_2, t_3, \dots$; alors on aura :

$$\frac{X_1}{t_1^2} \cong \frac{X_2}{t_2^2} \cong \frac{X_3}{t_3^2} \cong \dots \cong \frac{X_n}{t_n^2} \cong C_{te}. \quad (18)$$

Puisque le mouvement est uniformément accéléré ; la constante C devient :

$$C_{te.} = \frac{1}{2} a \Rightarrow a = 2C_{te}. \quad (19)$$

Pendule simple

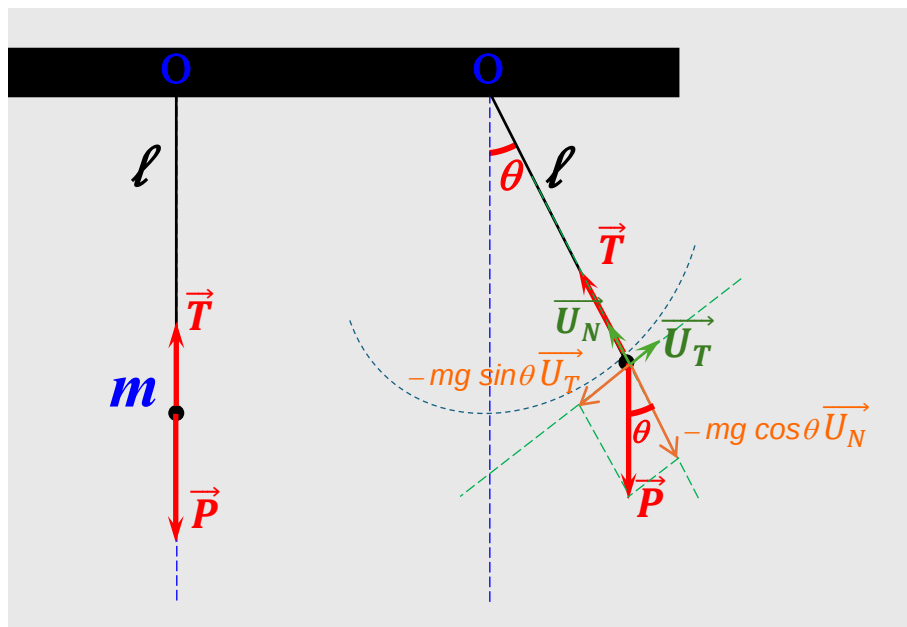
1. Objectifs

- Calcul de la période d'un pendule simple
- Calcul de g

2. Théorie

Un pendule simple est une masse m de dimensions négligeables attaché à un fil inextensible de longueur ℓ . Ecarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta < 10^\circ$, il va osciller harmoniquement et son équation temporelle sera de la forme $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Avec : $\theta_0 [\text{rad}]$ est l'amplitude initiale des oscillations, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ [rad/s] est la pulsation, $\varphi_0 [\text{rad}]$ est la phase initiale. On tire l'expression de la période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ [s] qui est le temps d'une oscillation complète (un aller-retour), on constate que T_0 est fonction de ℓ et de g . Pour des angles $10^\circ < \theta < 60^\circ$, il est préférable d'appliquer la formule de Borda : $T = T_0 (1 + \frac{\theta_0^2}{16})$ [s]

3. Démonstration



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (2)$$

(Dans la pratique, les oscillations sont légèrement amorties par les frottements de l'air, que nous négligeons ici.)

Dans le repère de Frenet on a : $\vec{P} \begin{pmatrix} P_T = -mg \sin\theta \\ P_N = -mg \cos\theta \end{pmatrix}$, $\vec{T} \begin{pmatrix} T_T = 0 \\ T_N = T \end{pmatrix}$ et $\vec{a} \begin{pmatrix} a_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \\ a_N = \frac{\|\vec{V}\|^2}{R} \end{pmatrix}$;

$$\|\vec{V}\| = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(\ell\theta)}{dt} = \ell\dot{\theta} \text{ est le module de la vitesse d'où } \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \ell\ddot{\theta}$$

et $R = \ell$ le rayon de courbure.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{Proj}}{\text{la tangente}} : -mg \sin\theta + 0 = m \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \\ \Rightarrow -g \sin\theta = \ell\ddot{\theta} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{Proj}}{\text{la normale}} : -mg \cos\theta + T = m \frac{\|\vec{V}\|^2}{R} \\ \Rightarrow -mg \cos\theta + T = m \ell\dot{\theta}^2 \end{array} \right. \quad (4)$$

A partir de l'Eq.3 on tire l'équation temporelle du mouvement en considérant la loi d'isochronisme des petites oscillations : $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$:

$$\Rightarrow g \sin\theta + \ell\ddot{\theta} = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow g\theta + \ell\ddot{\theta} = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 ; \text{ avec } \omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad (7)$$

L'Eq.7 est une équation différentielle de deuxième ordre sans second membre (ESSM), sa solution est sinusoïdale caractérisant un oscillateur harmonique :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (8)$$

D'où on tire la période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (9)$$

Pour des oscillations de grande amplitude, le comportement s'écarte de l'oscillateur harmonique à cause de la présence du terme non linéaire ($\sin\theta$). De ce fait, les oscillations ne sont plus sinusoïdales et la période de celles-ci dépend de l'amplitude θ_0 . La formule de Borda est une formule approximative qui donne la période des oscillations pour des amplitudes ne dépassant pas les 60° :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (10)$$

Pendule oscillant

1. Objectifs

- Etudier le mouvement d'un pendule oscillant
- Estimation de la période d'oscillation
- Estimation de k en modes statique et dynamique
- Vérification de la loi d'association des ressorts

2. Théorie

Un pendule élastique vertical est constitué par un ressort de masse négligeable dont une extrémité est fixe, et l'autre liée à une masse m libre de se mouvoir. Lorsque l'on allonge ou comprime un ressort celui-ci exerce une force de rappel qui est la tension élastique, donnée par la loi de *Hooke* $T = -k \Delta \ell = -k(\ell - \ell_0)$; Avec : ℓ est la longueur du ressort, ℓ_0 la longueur à vide, et k [N/m] la constante de raideur du ressort.

Ecarté de sa position d'équilibre il va osciller harmoniquement et son équation temporelle sera de la forme : $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Avec : X_0 [m] est l'amplitude initiale des oscillations, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s] est la pulsation,

L'expression de la période est $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ [s] qui est le temps d'une oscillation complète (un aller-retour) on constate que T_0 est fonction de m et de k .

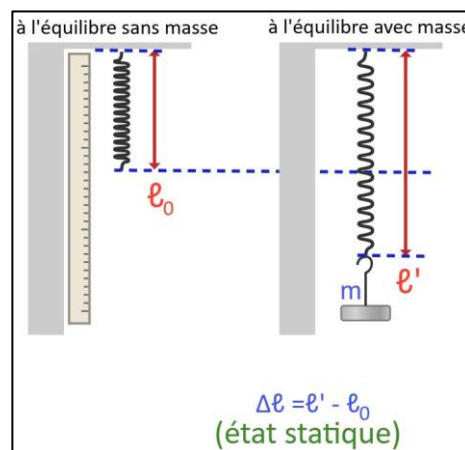
Démonstration

À l'équilibre, la longueur du pendule ℓ est le résultat d'une compétition entre le poids et la force de rappel élastique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{P} - \vec{T} = \vec{0} \quad (2)$$

$$mg - k \Delta \ell = 0 \quad (3)$$



On écarte de la position d'équilibre, et en appliquant le principe fondamental de la dynamique et si on désigne par $x(t)$ le déplacement de m par rapport à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (4)$$

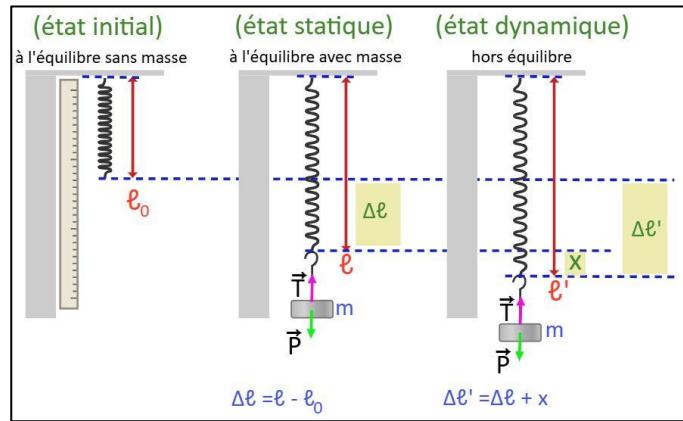
$$\vec{P} - \vec{T} = m\vec{a} \quad (5)$$

$$mg - k\Delta\ell' = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \quad (6)$$

$$\text{Avec : } \Delta\ell' = \ell' - \ell_0 = \Delta\ell + x$$

$$mg - k(\Delta\ell + x) = m\ddot{x} \quad (7)$$

$$mg - k\Delta\ell - kx = m\ddot{x} \quad (8)$$



En remplaçant la condition d'équilibre de l'Eq. 3 dans l'Eq. 8 on aura :

Finalement, l'élongation $x(t)$ du pendule élastique obéit à l'équation différentielle d'ordre 2 sans second membre (ESSM) (Eq. 9) :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10)$$

Il s'agit de l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation différentielle s'écrit $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$; Avec A et φ , deux constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales. Le système se met à osciller indéfiniment avec une amplitude A . Ces oscillations étant périodiques, on définit la période T_0 [s] et la fréquence f_0 [Hz] des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11)$$

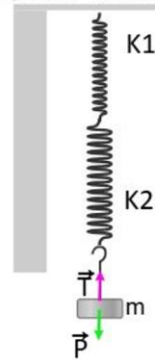
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$

On notera que T dépend des caractéristiques du pendule élastique (k et m) mais non de l'amplitude des oscillations : on parle d'*isochronisme des oscillations*.

Loi d'association

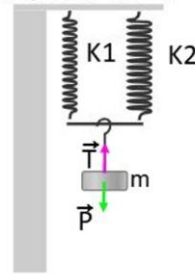
(couplage en série)

$$K_{\text{équivalent}} = K_1 K_2 / (K_1 + K_2)$$



(couplage en parallèle)

$$K_{\text{équivalent}} = K_1 + K_2$$



Dans le cas d'association de deux ressorts identiques ($k_1 = k_2 = k$) en série, la raideur équivalente :
 $k_s = (k_1 k_2) / (k_1 + k_2) = k/2$ (13)

Dans le cas d'association de deux ressorts identiques ($k_1 = k_2 = k$) en parallèle, la raideur équivalente : $k_p = k_1 + k_2 = 2k$ (14)

Moment d'inertie

1. Objectifs

- Initiation au concept du moment d'inertie I
- Détermination de I à partir de T pour différents corps

L'appareil d'oscillation angulaire permet d'étudier la relation entre la répartition de la masse et le moment d'inertie, ainsi que de déterminer quantitativement les moments d'inertie de différents corps modèles soumis à une oscillation angulaire autour d'un axe de rotation, à partir de la période T de leurs oscillations. C'est un axe est maintenu par un pivot dans un cadre en forme de U et est fixé à ce cadre au moyen d'un ressort hélicoïdal. Lorsque l'axe de rotation (ou un corps qui y est solidement fixé) est déplacé de sa position d'équilibre d'un angle θ , le ressort hélicoïdal s'oppose à ce déplacement et génère un moment de torsion M , dont la valeur augmente avec l'angle de déplacement. Le moment de torsion est proportionnel à l'angle de déplacement pour des déformations allant jusqu'à 180° . Le quotient $M / \theta = C$ est appelé constante de torsion angulaire (ou coefficient angulaire).

Montage



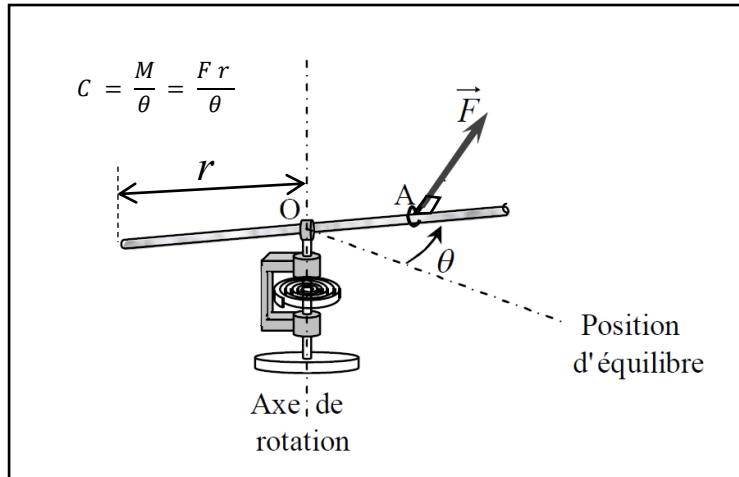
2. Théorie

Dans le cas des mouvements de rotation, les différentes parties d'un corps rigide se déplacent à des vitesses différentes. Ainsi, pour décrire mathématiquement un mouvement de rotation, on remplace la masse du corps par son moment d'inertie (ou *tenseur d'inertie*), qui constitue une mesure de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

Le moment d'inertie I (aussi couramment noté J ou Θ) dans le cas des mouvements de rotation est l'équivalent de la masse m dans les mouvements linéaires.

Avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ il détermine la grandeur du moment cinétique $\vec{L}$ ou de l'énergie de rotation E_{rot} d'un corps en mouvement de rotation.

3. Démonstration



Le moment d'inertie peut être calculé pour un corps à partir de l'intégrale volumique si sa distribution de densité $\rho(\vec{r})$ est connue :

$$I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \quad (1)$$

où $\vec{r}_{\perp}$ correspond à la composante de $\vec{r}$ perpendiculaire à l'axe de la rotation $\vec{\omega}$.

La relation entre le moment cinétique L et le moment du couple M d'un corps rigide dans un système de coordonnées au repos, en prenant le centre de gravité comme origine des coordonnées est :

$$M = \frac{dL}{dt} \quad (2)$$

Le moment cinétique s'exprime en fonction de la vitesse angulaire et du moment d'inertie :

$$L = I\omega \quad (3)$$

Dans le cas présent, ω est dirigée suivant l'axe (Oz) de sorte que L n'a qu'une seule composante :

$$L_z = I_z\omega \quad (4)$$

I_z étant la composante suivant l'axe des z du moment d'inertie. L'équation 1 devient dans ce cas :

$$M_z = I_z \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

Le moment du couple s'exprime dans le domaine élastique par :

$$M_Z = -C\theta \quad (6)$$

Où C est la constante de torsion du fil (tige ou barre en torsion) et θ est l'angle de rotation.

Sachant que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, l'équation du mouvement, s'écrit :

$$\text{(Eq. 4)} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I_Z}\theta = 0 \quad (6a)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{C}{I_Z} \quad (6b)$$

D'où la période des oscillations :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_Z}{C}} \quad (7)$$

La constante de torsion du fil (tige ou barre en torsion) est donnée par la relation :

$$C = \frac{\pi}{32} \frac{Ge^4}{\ell} \quad (8)$$

Avec : ℓ est la longueur du fil (tige ou barre en torsion), e est son épaisseur, G est le module de Coulomb.