Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Ingénieurs- **ST+TM**
Année universitaire
2025 / 2026

Corrigé de la série de TD n°2- Les applications

Exercice n°1

1. On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$.
Soit $y \in f(A_1)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \text{ car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_2). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. Montrons que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, alors :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Exercice n°2

1. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

(a) Calculons $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-6\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-6\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -6\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = -6\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x + 3 = 0\right\} \\ &= \emptyset. \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = 0\right\} \\ &= \{-3, 1\} \end{aligned}$$

(b) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f. i. Injectivité de f : D'après la question précédente, on a $f(-3) = 0 = f(1)$ mais $-3 \neq 1$. Donc f n'est pas injective.
ii. Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = -6$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).
iii. Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).
(c) Donnons des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons l'application réciproque f^{-1}.
Il est facile de vérifier que $f :] - \infty, -1] \longrightarrow [-4, +\infty[$ est une bijection et que

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-4, +\infty[&\longrightarrow] - \infty, -1] \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = -1 - \sqrt{4 + y}. \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi considérer la bijection $f : [-1, +\infty[\longrightarrow [-4, +\infty[$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-4, +\infty[&\longrightarrow [-1, +\infty[\\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + y} \end{aligned}$$

Exercice n°3

1. Soit l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{A}$ définie par $f(x) = \dfrac{ax + b}{x - 1}$.
a. f est injective $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{ax_1 + b}{x_1 - 1} = \frac{ax_2 + b}{x_2 - 1} \\ &\Longrightarrow (ax_1 + b)(x_2 - 1) = (ax_2 + b)(x_1 - 1) \\ &\Longrightarrow (a + b)x_1 = (a + b)x_2 \end{aligned}$$

donc f est injective $\Longrightarrow a + b \neq 0$.
b. f surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{A}, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = y$.

Soit $y \in \mathbb{A}$

$$y = \frac{ax+b}{x-1} \Longrightarrow yx - y = ax + b \Longrightarrow x(y-a) = y + b.$$

par suite,

$$x = \frac{y+b}{y-a}.$$

Donc f est surjective $\Longleftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{a\}$.
finalement f est bijective $\Longleftrightarrow (a + b \neq 0) \wedge \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{a\}$.

2. Soit l'application $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

a) Montrons que : g est injective :

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Longrightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

donc g est injective.

b. Calculons $g^{-1}(\{2\})$.

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) \in \{2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \frac{2x+1}{x-1} = 2\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \, 2x + 1 = 2x - 2\} \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

g n'est pas surjective car, car $\nexists x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2$.

c. g surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{A}, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} : g(x) = y$.
Soit $y \in \mathbb{A}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Longrightarrow yx - y = 2x + 1 \Longrightarrow x(y-2) = y + 1.$$

par suite,

$$x = \frac{y+1}{y-2}.$$

Donc g est surjective $\Longleftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{2\}$.
L'application réciproque g^{-1} :

$$g^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$
$$g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$$