Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs ST+TM

Année universitaire : 2025/2026
Algèbre 1 Octobre 2025

Corrigé de la série de TD N°01 : Ensembles et relations binaires

Exercice n°1 .

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 5\} \quad \text{et } A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

On détermine $A \cap B$. On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/-3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

On détermine : $\complement_E^{A\cup B}$.

$$\complement_E^{A\cup B} = \{x \in E/x \notin A \cup B\}$$

comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, d'où

$$\complement_E^{A\cup B} = \{-4, -3\}$$

On détermine : $A \backslash B$.

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \backslash \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

On détermine : $(A \cap B) \cap \complement_E^{A\cap B}$:

$$(A \cap B) \cap \complement_E^{A\cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \emptyset$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E.

a) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et on démontre que : $A \subset C_E B$.
Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, d'où $A \subset C_E B$.
Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x,y) : (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Alors, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
c) Montrons que : $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$
Soit $x \in A \cap (B - C)$, on a

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B - C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ et } x \in (A - C) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x \in A \cap (B - C) \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C)$.
Alors, $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$.
3 Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$
a) Donnons l'ensemble $E \times E$.
On a :

$$\begin{aligned} E \times E &= \{(x,y)/x \in E \text{ et } y \in E\} \\ &= \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,-1), (0,0), (0,1), \\ &\quad (0,2), (1,-1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,-1), (2,0), (2,1), (2,2)\} \end{aligned}$$

b) Déterminons les ensembles A, B et C.

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j) \in E \times E / i < j\} \\ &= \{(-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{(i,j) \in E \times E / i > j\} \\ &= \{(0,-1), (1,-1), (1,0), (2,-1), (2,0), (2,1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \{(i,j) \in E \times E / i = j\} \\ &= \{(-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2)\} \end{aligned}$$

c) Montrons que A, B et C forment une partition de $E \times E$.
On a :
1. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ et $C \neq \varnothing$.
2. $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ et $A \cap C = \varnothing$.
3. $A \cup B \cup C = E$.
D'où A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice n°2 .
Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $\Re$ la relation binaire définie sur E par :
$x \Re y \Longleftrightarrow x + y$ est pair.

1. Le graphe représentatif de $\Re$:je vais vous l'envoyer en photo après

2. Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence :

i. $\Re$ est réflexive car on a $\forall x \in E, x \Re x$

$$0\Re 0, \ 1\Re 1, \ 2\Re 2, \ 3\Re 3, \ 4\Re 4.$$

ii. $\Re$ est symétrique car on a $\forall x, y \in E, x \Re y \Longrightarrow y \Re x$

$$0\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0$$

$$0\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 0$$

$$0\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 0$$

$$1\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 1$$

$$1\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 1$$
$$2\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 2$$
$$2\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2$$
$$2\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 2$$
$$3\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 3$$
$$3\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3$$
$$4\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 4$$
$$4\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 4$$
$$4\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4.$$

iii. $\Re$ est transitive car on a $\forall x, y, z \in E, x\Re y \text{ et } y\Re z \Longrightarrow x\Re z$.

$$0\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$0\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$0\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$1\Re 1 \text{ et } 1\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 1,\ 1\Re 1 \text{ et } 1\Re 3 \Longrightarrow 1\Re 3,$$
$$1\Re 3 \text{ et } 3\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 1,\ 1\Re 3 \text{ et } 3\Re 3 \Longrightarrow 1\Re 3,$$
$$2\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,\ 2\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,$$
$$2\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,\ 2\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,$$
$$2\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,\ 2\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,$$
$$3\Re 1 \text{ et } 1\Re 1 \Longrightarrow 3\Re 1,\ 3\Re 1 \text{ et } 1\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3,$$
$$3\Re 3 \text{ et } 3\Re 1 \Longrightarrow 3\Re 1,\ 3\Re 3 \text{ et } 3\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3,$$
$$4\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4,$$
$$4\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4,$$
$$4\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4.$$

(On est pas obligé de leurs écrire tout sur le tableau, mais on peut juste leurs expliquer sur le graphe que c'est une relation d'équivalence)
Finalement, de i, ii et iii, $\Re$ est une relation d'équivalence.

3. Déterminons la classe de 0, et l'ensemble quotient$E/\Re$. O na :

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{x \in E, x\Re 0\} \\ &= \{x \in E, x + 0 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{x \in E, x\Re 1\} \\ &= \{x \in E, x + 1 \text{ est pair}\} \\ &= \{1, 3\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in E, x\Re 2\} \\ &= \{x \in E, x + 2 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\} = \overline{0}.\end{aligned}$$

$$\overline{3} = \overline{1}, \quad \text{et } \overline{4} = \overline{0}.$$

d'où

$$E/\Re = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}.$$

Exercice n°3 .

Soit τ une relation définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\tau y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

.

1. Montrons que τ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:

i. Réflexivité de τ : Soit $x \in \mathbb{R}$. De la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que la relation est réflexive.

ii. Symétrie de τ : Soient $x, y \in \mathbb{R}; x\tau y$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y \quad &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

mais, $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$, d'où

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc τ est symétrique.

iii. Transitivité de τ : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} : x\tau y$ et $y\tau z$. Montrons que $x\tau z$.
Si $x\tau y$ et $y\tau z$, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

ce implique

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

d'où

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$

Donc τ est transitive. Finalement, de i, ii et iii, τ est une relation d'équivalence.

2. Déterminons la classe d'équivalence de $\dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\pi}}{6}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}/x\tau\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x = \frac{3}{4}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\left|\cos x\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice n°4.
1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :

On a : $0\mathcal{R}2$, car $0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2$. Mais, $2 \not\mathcal{R} 0$, car $2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0$.

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique :
On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq 1$.
2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [, x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
i) Réflexivité de S ? $(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x)$?
Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [$. On $a : x^2 - x^2 = 0 = x - x$.
Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$.
Par la suite, $\forall x \in]\, \frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x$.
D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive.
ii) Antisymétrie de S ? $(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y)$?
Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et on démontre $x = y$. On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{cases}$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.
On a :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
iii) Transitivité de S : $\quad (\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z)$?
Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$ et on démontre $x\mathcal{S}z$.
On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc, $\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) Cet ordre est total.
En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.
On a : $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $x^2 - y^2 \geq x - y$.
donc, $\quad x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $y^2 - x^2 \leq y - x$.
d'où, $\quad x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.
Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$: $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.

Exercice n°5. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}^* : y = nx^m$.

1. Montrons que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.
   - **Reflexivité** : Soir $x \in \mathbb{N}$. On a $x = 1x^1 \Rightarrow \exists (n = 1, m = 1) \in \mathbb{N}^* : x = nx^m \Rightarrow x\mathfrak{R}x$. Donc $\forall x \in \mathbb{N}$, $x\mathfrak{R}x$, d'où la reflixivité de $\mathfrak{R}$
   - **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x$. On a $\begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m\,; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, & x = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = n(n'y^{m'})^m \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = nn'^m y^{mm'} \Rightarrow nn'^m = 1$ et $mm' = 1$. Comme $n, n', m, m' \in \mathbb{N}^*$, alors $n = n' = 1$ etm=m'=1$\Rightarrow$ par suite $x = y$. Donc $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de $\mathfrak{R}$.
   - **Transitivité** : Soient $x, yetz \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}, & z = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'(nx^m)^{m'} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'n^{m'}x^{mm'} \Rightarrow \exists n'' = n'n^{m'}, m'' = mm' \in \mathbb{N}^* : z = n''x^{m''} \Rightarrow x\mathfrak{R}z$. Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$. D'où la transitivité de $\mathfrak{R}$.Comme $\mathfrak{R}$ est reflexive, antisymétrique et transitive, alors $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre de $\mathfrak{R}$ n'est pas total car si on prend $x = 3$ et $y = 5$. On a $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : 5 \neq n3^m$ et $3 \neq n5^m$.