

## Corrigé de la série de TD N°01 : Ensembles et relations binaires

### Exercice n°1 .

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} \quad \text{et} \quad A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

On détermine  $A \cap B$ . On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

On détermine :  $\mathbb{C}_E^{A \cup B}$ .

$$\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \{x \in E / x \notin A \cup B\}$$

comme :  $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , d'où

$$\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \{-4, -3\}$$

On détermine :  $A \setminus B$ .

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

On détermine :  $(A \cap B) \cap \mathbb{C}_E^{A \cap B}$  :

$$(A \cap B) \cap \mathbb{C}_E^{A \cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \emptyset$$

2. Soient  $E$  un ensemble non vide et  $A, B, C$  et  $D$  quatre parties de  $E$ .

a) Montrons que :  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$ .

On suppose que  $A \cap B = \emptyset$  et on démontre que :  $A \subset C_E B$ .

Soit  $x \in A$ .

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc  $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$ , d'où  $A \subset C_E B$ .

Alors,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que :  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Soit  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ .

On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc,  $\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Alors,  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

c) Montrons que :  $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$

Soit  $x \in A \cap (B - C)$ , on a

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ et } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

Donc,  $\forall x : x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C)$ .

Alors,  $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$ .

3 Soit  $E = \{-1, 0, 1, 2\}$

a) Donnons l'ensemble  $E \times E$ .

On a :

$$\begin{aligned} E \times E &= \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in E\} \\ &= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), \\ &\quad (0, 2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

b) Déterminons les ensembles  $A, B$  et  $C$ .

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \in E \times E / i < j\} \\ &= \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \\ B &= \{(i, j) \in E \times E / i > j\} \\ &= \{(0, -1), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\} \\ C &= \{(i, j) \in E \times E / i = j\} \\ &= \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

c) Montrons que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $E \times E$ .

On a :

1.  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$  et  $C \neq \emptyset$ .
2.  $A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset$  et  $A \cap C = \emptyset$ .
3.  $A \cup B \cup C = E$ .

D'où  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $E \times E$ .

### Exercice n°2 .

Soit  $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , et  $\mathfrak{R}$  la relation binaire définie sur  $E$  par :

$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x + y$  est pair.

1. Le graphe représentatif de  $\mathfrak{R}$  : je vais vous l'envoyer en photo après

2. Montrons que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence :

i.  $\mathfrak{R}$  est réflexive car on a  $\forall x \in E, x\mathfrak{R}x$

$$0\mathfrak{R}0, 1\mathfrak{R}1, 2\mathfrak{R}2, 3\mathfrak{R}3, 4\mathfrak{R}4.$$

ii.  $\mathfrak{R}$  est symétrique car on a  $\forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$

$$0\mathfrak{R}0 \Rightarrow 0\mathfrak{R}0$$

$$0\mathfrak{R}2 \Rightarrow 2\mathfrak{R}0$$

$$0\mathfrak{R}4 \Rightarrow 4\mathfrak{R}0$$

$$1\mathfrak{R}1 \Rightarrow 1\mathfrak{R}1$$

$$1\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}1$$

$$2\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}2$$

$$2\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2$$

$$2\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}2$$

$$3\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}3$$

$$3\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3$$

$$4\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}4$$

$$4\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}4$$

$$4\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4.$$

iii.  $\mathfrak{R}$  est transitive car on a  $\forall x, y, z \in E, x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$ .

$$0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3,$$

$$1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3,$$

$$2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4,$$

$$2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2,$$

$$2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4,$$

$$3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 \implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3,$$

$$3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 \implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3,$$

$$4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4,$$

$$4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4,$$

$$4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4.$$

(On est pas obligé de leurs écrire tout sur le tableau, mais on peut juste leurs expliquer sur le graphe que c'est une relation d'équivalence)

Finalement, de i, ii et iii,  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence.

3. Déterminons la classe de 0, et l'ensemble quotient  $E/\mathfrak{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}0\} \\ &= \{x \in E, x + 0 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{1} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}1\} \\ &= \{x \in E, x + 1 \text{ est pair}\} \\ &= \{1, 3\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}2\} \\ &= \{x \in E, x + 2 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\} = \bar{0}.\end{aligned}$$

$$\bar{3} = \bar{1}, \quad \text{et } \bar{4} = \bar{0}.$$

d'où

$$E/\mathfrak{R} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

### Exercice n°3 .

Soit  $\tau$  une relation définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x\tau y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

.

1. Montrons que  $\tau$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$  :

i. Réflexivité de  $\tau$  : Soit  $x \in \mathbb{R}$ . De la formule  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , on déduit que la relation est réflexive.

ii. Symétrie de  $\tau$  : Soient  $x, y \in \mathbb{R}; x\tau y$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

mais,  $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$ , d'où

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc  $\tau$  est symétrique.

iii. Transitivité de  $\tau$  : Soient  $x, y, z \in \mathbb{R} : x\tau y$  et  $y\tau z$ . Montrons que  $x\tau z$ .

Si  $x\tau y$  et  $y\tau z$ , on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

ce implique

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

d'où

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$

Donc  $\tau$  est transitive. Finalement, de i, ii et iii,  $\tau$  est une relation d'équivalence.

2. Déterminons la classe d'équivalence de  $\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R} / x\tau \frac{\pi}{6}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x = \frac{3}{4}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

**Exercice n°4.**

1) Dans  $\mathbb{R}$ , on définit la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que  $\mathcal{R}$  n'est pas symétrique :

$$\text{On a : } 0\mathcal{R}2, \text{ car } 0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2. \text{ Mais, } 2 \not\mathcal{R}0, \text{ car } 2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0.$$

b) Montrons que  $\mathcal{R}$  n'est pas antisymétrique :

On a  $0\mathcal{R}1$  et  $1\mathcal{R}0$ , car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais  $0 \neq 1$ .

2) On définit sur  $]\frac{1}{2}, +\infty[$  la relation binaire  $\mathcal{S}$  par :

$$\forall x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que  $\mathcal{S}$  est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de  $\mathcal{S}$  ? ( $\forall x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}x$ ) ?

Soit  $x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ . On a :  $x^2 - x^2 = 0 = x - x$ .

Donc,  $x^2 - x^2 \leq x - x$ .

Par la suite,  $\forall x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}x$ .

D'où,  $\mathcal{S}$  est une relation réflexive.

ii) Antisymétrie de  $\mathcal{S}$  ? ( $\forall x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \implies x = y$ ) ?

Soient  $x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ . On suppose que  $x\mathcal{S}y$  et  $y\mathcal{S}x$  et on démontre  $x = y$ . On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}x \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par la suite,  $x^2 - y^2 = x - y$ .

On a :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\implies (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \implies x = y$ .

D'où la relation  $\mathcal{S}$  est antisymétrique.

iii) Transitivité de  $\mathcal{S}$  : ( $\forall x, y, z \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \implies x\mathcal{S}z$ ) ?

Soient  $x, y, z \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ . On suppose  $x\mathcal{S}y$  et  $y\mathcal{S}z$  et on démontre  $x\mathcal{S}z$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{array} \right. \\ &\implies x^2 - z^2 \leq x - z. \end{aligned}$$

Donc,  $\forall x, y, z \in ]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \implies x\mathcal{S}z$ .

D'où la relation  $\mathcal{S}$  est transitive

De (i), (ii) et (iii), on a  $\mathcal{S}$  est une relation d'ordre.

b) Cet ordre est total.

En effet, soient  $x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

On a :  $x^2 - y^2 \leq x - y$  ou  $x^2 - y^2 \geq x - y$ .

donc,  $x^2 - y^2 \leq x - y$  ou  $y^2 - x^2 \leq y - x$ .

d'où,  $x\mathcal{S}y$  ou  $y\mathcal{S}x$ .

Alors,  $\forall x, y \in ]\frac{1}{2}, +\infty[ : x\mathcal{S}y$  ou  $y\mathcal{S}x$ .

**Exercice n°5.** On définit sur  $\mathbb{N}$  la relation binaire  $\mathfrak{R}$  par :

$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}^* : y = nx^m$ .

1. Montrons que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'ordre.

• **Reflexivité** : Soit  $x \in \mathbb{N}$ . On a  $x = 1x^1 \Rightarrow \exists (n = 1, m = 1) \in \mathbb{N}^* : x = nx^m \Rightarrow x\mathfrak{R}x$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}x$ , d'où la réflexivité de  $\mathfrak{R}$

• **Symétrie** : Soient  $x, y \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}x$ . On a  $\begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, & x = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* :$

$y = n(n'y^{m'})^m \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = nn'^m y^{mm'} \Rightarrow nn'^m = 1$  et  $mm' = 1$ . Comme  $n, n', m, m' \in \mathbb{N}^*$ , alors  $n = n' = 1$  et  $m = m' = 1 \Rightarrow$  par suite  $x = y$ . Donc  $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y$ . D'où l'antisymétrie de  $\mathfrak{R}$ .

• **Transitivité** : Soient  $x, y, z \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}z \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, & z = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* :$

$z = n'(nx^m)^{m'} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'n^{m'} x^{mm'} \Rightarrow \exists n'' = n'n^{m'}, m'' = mm' \in \mathbb{N}^* : z = n''x^{m''} \Rightarrow x\mathfrak{R}z$ . Donc  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$ . D'où la transitivité de  $\mathfrak{R}$ . Comme  $\mathfrak{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive, alors  $\mathfrak{R}$  est une relation d'ordre.

2. L'ordre de  $\mathfrak{R}$  n'est pas total car si on prend  $x = 3$  et  $y = 5$ . On a  $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : 5 \neq n3^m$  et  $3 \neq n5^m$ .