

Corrigé de la série de TD N°01 : Ensembles et relations binaires

Exercice n°1 .

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} \quad \text{et } A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

On détermine $A \cap B$. On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

On détermine : $\complement_E^{A \cup B}$.

$$\complement_E^{A \cup B} = \{x \in E / x \notin A \cup B\}$$

comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, d'où

$$\complement_E^{A \cup B} = \{-4, -3\}$$

On détermine : $A \setminus B$.

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

On détermine : $(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B}$:

$$(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \emptyset$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E .

a) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.

On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et on démontre que : $A \subset C_E B$.

Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, d'où $A \subset C_E B$.

Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Alors, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

c) Montrons que : $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$

Soit $x \in A \cap (B - C)$, on a

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ et } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A - C). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C)$.

Alors, $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$.

3 Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$

a) Donnons l'ensemble $E \times E$.

On a :

$$\begin{aligned} E \times E &= \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in E\} \\ &= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), \\ &\quad (0, 2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

b) Déterminons les ensembles A, B et C .

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \in E \times E / i < j\} \\ &= \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \\ B &= \{(i, j) \in E \times E / i > j\} \\ &= \{(0, -1), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\} \\ C &= \{(i, j) \in E \times E / i = j\} \\ &= \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

c) Montrons que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

On a :

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ et $C \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$.
3. $A \cup B \cup C = E$.

D'où A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice n°2 .

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et \mathfrak{R} la relation binaire définie sur E par :

$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x + y$ est pair.

1. Le graphe représentatif de \mathfrak{R} : je vais vous l'envoyer en photo après

2. Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence :

i. \mathfrak{R} est réflexive car on a $\forall x \in E, x \mathfrak{R} x$

$$0 \mathfrak{R} 0, 1 \mathfrak{R} 1, 2 \mathfrak{R} 2, 3 \mathfrak{R} 3, 4 \mathfrak{R} 4.$$

ii. \mathfrak{R} est symétrique car on a $\forall x, y \in E, x \mathfrak{R} y \Rightarrow y \mathfrak{R} x$

$$0 \mathfrak{R} 0 \Rightarrow 0 \mathfrak{R} 0$$

$$0 \mathfrak{R} 2 \Rightarrow 2 \mathfrak{R} 0$$

$$0 \mathfrak{R} 4 \Rightarrow 4 \mathfrak{R} 0$$

$$1 \mathfrak{R} 1 \Rightarrow 1 \mathfrak{R} 1$$

$$\begin{aligned}
1\mathfrak{R}3 &\implies 3\mathfrak{R}1 \\
2\mathfrak{R}0 &\implies 0\mathfrak{R}2 \\
2\mathfrak{R}2 &\implies 2\mathfrak{R}2 \\
2\mathfrak{R}4 &\implies 4\mathfrak{R}2 \\
3\mathfrak{R}1 &\implies 1\mathfrak{R}3 \\
3\mathfrak{R}3 &\implies 3\mathfrak{R}3 \\
4\mathfrak{R}0 &\implies 0\mathfrak{R}4 \\
4\mathfrak{R}2 &\implies 2\mathfrak{R}4 \\
4\mathfrak{R}4 &\implies 4\mathfrak{R}4.
\end{aligned}$$

iii. \mathfrak{R} est transitive car on a $\forall x, y, z \in E, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$.

$$\begin{aligned}
0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 &\implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4, \\
0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 &\implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4, \\
0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 &\implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4, \\
1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 &\implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3, \\
1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 &\implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3, \\
2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 &\implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4, \\
2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 &\implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, \\
2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 &\implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4, \\
3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 &\implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3, \\
3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 &\implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3, \\
4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 &\implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4, \\
4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 &\implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4, \\
4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 &\implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4.
\end{aligned}$$

(On est pas obligé de leurs écrire tout sur le tableau, mais on peut juste leurs expliquer sur le graphe que c'est une relation d'équivalence)

Finalement, de i, ii et iii, \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

3. Déterminons la classe de 0, et l'ensemble quotient E/\mathfrak{R} . On a :

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}0\} \\
&= \{x \in E, x + 0 \text{ est pair}\} \\
&= \{0, 2, 4\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}1\} \\
&= \{x \in E, x + 1 \text{ est pair}\} \\
&= \{1, 3\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{2} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}2\} \\
&= \{x \in E, x + 2 \text{ est pair}\} \\
&= \{0, 2, 4\} = \bar{0}.
\end{aligned}$$

$$\bar{3} = \bar{1}, \text{ et } \bar{4} = \bar{0}.$$

d'où

$$E/\mathfrak{R} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Exercice n°3 .

Soit τ une relation définie sur l'ensemble \mathbb{R} comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x\tau y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

1. Montrons que τ est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} :

- i. Réflexivité de τ : Soit $x \in \mathbb{R}$. De la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que la relation est réflexive.
- ii. Symétrie de τ : Soient $x, y \in \mathbb{R}$; $x\tau y$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

mais, $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$, d'où

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc τ est symétrique.

iii. Transitivité de τ : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x\tau y$ et $y\tau z$. Montrons que $x\tau z$.

Si $x\tau y$ et $y\tau z$, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

ce implique

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

d'où

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$

Donc τ est transitive. Finalement, de i, ii et iii, τ est une relation d'équivalence.

2. Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x\tau \frac{\pi}{6} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \cos^2 x = \frac{3}{4} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice n°4.

1) Dans \mathbb{R} , on définit la relation binaire \mathcal{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que \mathcal{R} n'est pas symétrique :

On a : $0 \mathcal{R} 2$, car $0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2$. Mais, $2 \not\mathcal{R} 0$, car $2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0$.

b) Montrons que \mathcal{R} n'est pas antisymétrique :

On a $0 \mathcal{R} 1$ et $1 \mathcal{R} 0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq 1$.

2) On définit sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ la relation binaire \mathcal{S} par :

$$\forall x, y \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} y \iff x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que \mathcal{S} est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de \mathcal{S} ? ($\forall x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} x$) ?

Soit $x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. On a : $x^2 - x^2 = 0 = x - x$.

Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$.

Par la suite, $\forall x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} x$.

D'où, \mathcal{S} est une relation réflexive.

ii) Antisymétrie de \mathcal{S} ? ($\forall x, y \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} y \text{ et } y \mathcal{S} x \implies x = y$) ?

Soient $x, y \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. On suppose que $x \mathcal{S} y$ et $y \mathcal{S} x$ et on démontre $x = y$. On a

$$\begin{cases} x \mathcal{S} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{S} x \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{cases}$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.

On a :

$$x^2 - y^2 = x - y \implies (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

$$\implies \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[) \end{cases}$$

Donc, $\forall x, y \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} y \text{ et } y \mathcal{S} x \implies x = y$.

D'où la relation \mathcal{S} est antisymétrique.

iii) Transfertivité de \mathcal{S} : ($\forall x, y, z \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} y \text{ et } y \mathcal{S} z \implies x \mathcal{S} z$) ?

Soient $x, y, z \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. On suppose $x \mathcal{S} y$ et $y \mathcal{S} z$ et on démontre $x \mathcal{S} z$.

On a :

$$\begin{cases} x \mathcal{S} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{S} z \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases} \implies x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc, $\forall x, y, z \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[, x \mathcal{S} y \text{ et } y \mathcal{S} z \implies x \mathcal{S} z$.

D'où la relation \mathcal{S} est transitive

De (i), (ii) et (iii), on a \mathcal{S} est une relation d'ordre.

b) Cet ordre est total.

En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On a : $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $x^2 - y^2 \geq x - y$.

donc, $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $y^2 - x^2 \leq y - x$.

d'où, $x \mathcal{S} y$ ou $y \mathcal{S} x$.

Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$: $x \mathcal{S} y$ ou $y \mathcal{S} x$.

Exercice n°5. On définit sur \mathbb{N} la relation binaire \mathfrak{R} par :

$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}^* : y = nx^m$.

1. Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'ordre.

• **Reflexivité** : Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $x = 1 \xrightarrow{1} \exists(n = 1, m = 1) \in \mathbb{N}^* : x = nx^m \Rightarrow x \mathfrak{R} x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{N}, x \mathfrak{R} x$, d'où la réflexivité de \mathfrak{R} .

• **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{N}$: $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x$. On a $\begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, x = n'y^{m'} \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = n(n'y^{m'})^m \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = nn'^m y^{mm'} \Rightarrow nn'^m = 1$ et $mm' = 1$. Comme $n, n', m, m' \in \mathbb{N}^*$, alors $n = n' = 1$ et $m = m' = 1 \Rightarrow$ par suite $x = y$. Donc $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de \mathfrak{R} .

• **Transitivité** : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$: $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}, z = n'y^{m'} \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'(nx^m)^{m'} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'n^{m'}x^{mm'} \Rightarrow \exists n'' = n'n^{m'}, m'' = mm' \in \mathbb{N}^* : z = n''x^{m''} \Rightarrow x \mathfrak{R} z$. Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$. D'où la transitivité de \mathfrak{R} . Comme \mathfrak{R} est réflexive, antisymétrique et transitive, alors \mathfrak{R} est une relation d'ordre.

2. L'ordre de \mathfrak{R} n'est pas total car si on prend $x = 3$ et $y = 5$. On a $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : 5 \neq n3^m$ et $3 \neq n5^m$.