

Séris de TD N°02 : Les applications
(A traiter en 2 séances à 2 et demi)

Exercice 1

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 deux parties de F . Montrer que :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

1. Calculer $f(\{1, 5\})$, $f([0, 1])$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}([0, \infty[)$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner les intervalles I et J pour lesquels la fonction $f : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer l'application réciproque f^{-1} dans ce cas.

Exercice 3

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.
2. Calculer $f^{-1}(\{-2\})$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
4. Montrer que l'application $g : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection et donner sa réciproque.