Université de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département ST

Série de TD 1 d'Analyse 1

1ère Année ST
Année universitaire 2025/2026

Exo 1 :
Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$.

1. Déterminer explicitement l'ensemble A.
2. Cet ensemble est-il borné ?
3. Donner $\inf A$ et $\sup A$.
4. Dire si A possède un maximum ou un minimum.

Exo 2 :
On considère $B = \left\{ \frac{2n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Calculer les premiers termes.
2. Donner un majorant et un minorant de B.
3. Déterminer $\inf B$ et $\sup B$.
4. L'ensemble B admet-il un maximum ? un minimum ?

Exo 3 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|\, 2|x-1| - 3 \,| = 1$.

Exo 4 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-2| + |x+1| \leq 4$.

Exo 5 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $E(2x) = E(x) + 1$.

Exo 6 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $E(|x|) = 2|E(x)|$.

Université de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département ST

Série de TD 1 d'Analyse 1 — Corrigé

1ère Année ST

Année universitaire 2025/2026

Exo 1 :

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$.

1. Factorisation : $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. L'inégalité $(x-1)(x-3) < 0$ est satisfaite pour $1 < x < 3$. Donc $A = (1, 3)$.
2. A est borné (inclus dans $(1, 3)$).
3. $\inf A = 1, \qquad \sup A = 3$.
4. A est un intervalle ouvert donc il n'a ni minimum ni maximum.

Exo 2 :

$B = \left\{ \dfrac{2n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Premiers termes : $n = 1 : \; 1, \quad n = 2 : \; 5/4, \quad n = 3 : \; 7/5, \quad n = 4 : \; 3/2, \ldots$
2. On observe (et on montre) que la suite $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ est strictement croissante pour $n \geq 1$. Deux majorants possibles : 2 ou 3 par exemple. Un minorant : 1 (valeur pour $n = 1$).
3. Limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = 2$. Donc $\inf B = a_1 = 1$ et $\sup B = 2$.
4. Le minimum existe : $\min B = 1$ (attainu pour $n = 1$). Le supremum 2 n'est pas atteint donc pas de maximum.

Exo 3 :

Résoudre $\,|\,2|x-1| - 3\,| = 1$.

Posons $u = |x - 1| \geq 0$. L'équation devient $|2u - 3| = 1$. Ainsi $2u - 3 = 1$ ou $2u - 3 = -1$, donc $u = 2$ ou $u = 1$.

- Si $|x - 1| = 2$ alors $x - 1 = \pm 2$ d'où $x = 3$ ou $x = -1$. - Si $|x - 1| = 1$ alors $x - 1 = \pm 1$ d'où $x = 2$ ou $x = 0$.

$\boxed{x \in \{-1, 0, 2, 3\}}$.

Exo 4 :

Résoudre $\,|x - 2| + |x + 1| \leq 4$.

Étudions par intervalles délimités par -1 et 2.

— $x \leq -1$: somme $= -2x + 1 \leq 4 \Rightarrow -2x \leq 3 \Rightarrow x \geq -1$. Intersection donne $x = -1$.

— $-1 \leq x \leq 2$: somme $= 3 \leq 4$ — vraie pour tout x de l'intervalle.

— $x \geq 2$: somme $= 2x-1 \leq 4 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq 2{,}5$. Intersection donne $2 \leq x \leq 2{,}5$.

Union des solutions : $\boxed{[-1,\ 2{,}5]}$.

Exo 5 :

Résoudre $\;E(2x) = E(x) + 1$.

Notons $k = \lfloor x \rfloor$, donc $x \in [k, k+1)$.

Alors $2x \in [2k, 2k+2)$ et $\lfloor 2x \rfloor \in \{2k, 2k+1\}$.

On veut $\lfloor 2x \rfloor = k + 1$. Deux cas :

— Si $\lfloor 2x \rfloor = 2k$ alors $2k = k + 1 \Rightarrow k = 1$. Condition $\lfloor 2x \rfloor = 2k$ équivaut à $x \in [k, k+0{,}5)$. Pour $k = 1$ on obtient $x \in [1, 1{,}5)$.

— Si $\lfloor 2x \rfloor = 2k + 1$ alors $2k + 1 = k + 1 \Rightarrow k = 0$. Condition $\lfloor 2x \rfloor = 2k+1$ équivaut à $x \in [k + 0{,}5, k + 1)$. Pour $k = 0$ on obtient $x \in [0{,}5, 1)$.

En réunissant : $\boxed{x \in [0{,}5,\ 1{,}5)}$.

Exo 6 :

Résoudre $\;E(|x|) = 2|E(x)|$.

Étudions les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

— Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et $E(|x|) = E(x)$. De plus $E(x) \geq 0$ donc $|E(x)| = E(x)$. L'équation devient $E(x) = 2E(x)$ d'où $E(x) = 0$. Ainsi $x \in [0, 1)$.

— Si $x < 0$ posons $k = E(x)$. Alors $k \leq -1$ et $x \in [k, k+1)$. Pour $x = k$ (point isolé) on vérifie à part : il n'y a pas de solution entière negative. Pour $x \in (k, k+1)$ on a $E(|x|) = \lfloor -x \rfloor = -k-1$ et $2|E(x)| = -2k$. L'équation $-k-1 = -2k$ conduit à $k = 1$ (impossible car $k \leq -1$). Donc aucun $x < 0$ n'est solution.

Conclusion : $\boxed{x \in [0, 1)}$.