

Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✂– Série de TD numéro 2 –✂

Exercice 1 :

a. Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites numériques suivantes :

$$1. \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad 2. \quad v_n = \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \quad 3. \quad w_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \quad 4. \quad \frac{3^n + (-3)^n}{3^n}.$$

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k}$.

Montrer, à l'aide du théorème d'encadrement, que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
 2. Étudier la monotonie de (u_n) .
 3. Dédire la convergence de (u_n) et calculer sa limite.
 4. Déterminer $\sup E, \inf E$ où $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
-

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On considère deux suites v_n et w_n définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
 2. En déduire que (u_n) converge.
-

Exercice 4 : Soient (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3}$

et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
 2. Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.
-

Exercice 5 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{3}{8}.$$

« Corrigé »

Exercice n° 01

a) Calcul de limites

En multipliant
et en divisant
par le conjugué

$$1. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$2. v_n = \frac{n \sin n}{n^2 + 1}, \text{ il est clair que } -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Rightarrow -n \leq n \sin n \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{n^2 + 1} \leq \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$3) W_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}{2^n + 3^n}$$

$$= \frac{3^n \left(2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right)} = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, alors $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 3}$

4) $t_n = \frac{3^n + (-3)^n}{3^n}$ on distingue deux cas

Si n pair: $(-3)^n = 3^n \Rightarrow t_n = \frac{3^n + 3^n}{3^n} = 2$

Si n impair: $(-3)^n = -3^n \Rightarrow t_n = \frac{3^n - 3^n}{3^n} = 0$

dans ce cas t_n n'admet pas de limite.

b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k}$

$$1 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow 1 + n^3 \leq k + n^3 \leq n + n^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n + n^3} \leq \frac{1}{k + n^3} \leq \frac{1}{1 + n^3}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n + n^3} \leq \frac{n}{k + n^3} \leq \frac{n}{1 + n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{n}{n + n^3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k + n^3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{1 + n^3}$$

\Rightarrow

$$\frac{n^2}{n^3+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$, alors

d'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Exercice n° 09.

$$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n < 1 \quad (\text{démonstration par récurrence})$$

Pour $n=0$, on a $0 < (u_0 = 1/2) < 1$, donc

la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que la propriété est vraie pour n ($0 < u_n < 1$) et montrons que

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } u_n > 0 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 2u_n - 1}{1+2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{1 + 2u_n} < 0 \quad (\text{car } u_n < 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 1}. \text{ Donc } 0 < u_{n+1} < 1.$$

$$\text{Par récurrence } \forall n \in \mathbb{N}: \boxed{0 < u_n < 1}.$$

2) Monotonie

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n}$$

$$= \frac{2u_n(1 - u_n)}{1 + 2u_n} > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } u_n > 0 \text{ et} \\ u_n < 1 \text{ (} \boxed{1 - u_n > 0} \text{)} \end{array} \right)$$

alors u_n est strictement croissante.

3) Convergence et limite $l(u_n)$:

Comme u_n est \nearrow , majorée par 1, alors

u_n converge vers $0 < l \leq 1$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \Rightarrow l = \frac{3l}{1 + 2l} \Rightarrow$$

$$(1 + 2l)l = 3l \Rightarrow l + 2l^2 - 3l = 0$$

$$\Rightarrow 2(l^2 - l) = 0 \Rightarrow 2l(l - 1) = 0$$

$$\Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1.$$

Comme $u_n \nearrow$ et $u_0 = 1/2$, alors $l = 1$

u) $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$:

$u_n \nearrow$ avec la valeur $u_0 = 1/2$ (plus petite valeur)

alors $\inf(E) = 1/2$

u_n majorée par 1 et $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1\right)$,
alors $\sup(E) = 1$.

Exercice n° 03 $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, n \geq 1;$

$$v_n = u_{2n}, w_n = u_{2n+1}$$

1) Montrons que v_n et w_n sont adjacentes

$$\begin{aligned} \text{a) } v_{n+1} - v_n &= u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} \\ &= \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2 - 2n-1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0, \text{ alors } v_n \text{ est croissante} \end{aligned}$$

$$b) W_{n+1} - W_n = U_{2(n+1)+1} - U_{2n+1}$$

$$= U_{2n+3} - U_{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-2n-3+2n+2}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0, \text{ also } W_n \text{ ist}$$

decreasing.

$$c) W_n - V_n = U_{2n+1} - U_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} W_n - V_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

also it is monotone and V_n is
 W_n is adjacent

2) Comme $(u_{2n} = v_n)$ et $(u_{2n+1} = w_n)$ convergent vers la même limite $\textcircled{1}$ alors u_n converge vers $\textcircled{1}$.

Exercice n° 04 $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3}, v_n = \frac{1}{u_{n+1}} \end{cases}$

1) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3}} = \frac{1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3}} \\ &= \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + 3}{u_n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} = \boxed{\frac{1}{2} + v_n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} + v_n}, n \geq 1 \Rightarrow v_n$ est une suite arithmétique de raison $\textcircled{1/2}$

avec $\boxed{v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = 1}$

2) Convergence et limite de (u_n) :

$$v_n + \frac{1}{2} = v_{n+1}, \text{ alors}$$

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2}, \quad v_2 = v_1 + \frac{1}{2} = v_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\dots \quad v_n = v_0 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} = v_0 + \frac{n}{2} =$$

$$\boxed{1 + \frac{n}{2}}. \text{ Comme } v_n = \frac{1}{u_n + 1} \Rightarrow$$

$$(u_n + 1) = \frac{1}{v_n} \Rightarrow$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{2+n} - 1 = \frac{2 - 2 - n}{2+n} = \boxed{\frac{-n}{2+n}}$$

$$\therefore \text{Donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1}$$

Exercice n° 05

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - \frac{1}{4} \text{ et}$$

$$v_n = u_n + \frac{3}{8}.$$

1) $v_{n+1} = f(v_n)$:

$$\text{Or } v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{8} = \left(\frac{u_n}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{8}$$

$$= \boxed{\frac{u_n}{3} + \frac{1}{8}}. \text{ Comme } v_n = u_n + \frac{3}{8}$$

$$\text{alors } u_n = v_n - \frac{3}{8}, \text{ donc}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} \left(v_n - \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{3} v_n - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} v_n \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n}. \text{ Donc } v_n \text{ est une}$$

suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\text{et } v_0 = u_0 + \frac{3}{8} = 0 + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

2) $v_n = f(n)$: $v_n = v_0 q^n = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\text{Comme } \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: Or $u_n = v_n - \frac{3}{8} \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \frac{3}{8} = \boxed{-\frac{3}{8}}.$$