Série de TD N°03 (A traiter en 7 séances)

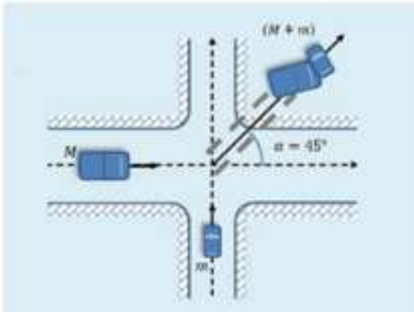
Exercice 01 :

Un point matériel M de masse m se déplace sous l'action d'une force $\vec{F}$, telle que : $\vec{F} = \vec{F}_0 sin(\omega t)$. Où $\vec{F}_0$ est un vecteur constant et ω une constante positive.

1- Déterminer les vecteurs accélération $\vec{a}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$, position $\overrightarrow{OM}(t)$ et la quantité de mouvement $\vec{P}(t)$ de M à un instant t, sachant que $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

2- Monter que $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

Exercice 02 :



Après une collision entre un camion et une voiture, les deux véhicules restent emmêlés l'un dans l'autre et la trace des roues sur le sol indique une trajectoire droite à 45° de leurs deux routes (voir la figure ci-contre). Un témoin affirme que le camion roulait très vite ; au moins à 85 km/h.

- Peut-on croire ce témoin ?

On donne : M_{camion} = 2T, $m_{voiture}$ = 500kg.

Exercice 03:

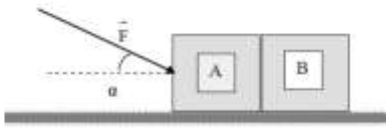
Un satellite de masse m_1 est en orbite autour de la terre, de masse M_T et de rayon R, à une distance r_1 (par rapport au centre de la terre). Le mouvement du satellite est circulaire et uniforme.

1- Donner l'expression de l'accélération de la pesanteur g de ce satellite en fonction de g_0 accélération de la pesanteur à la surface de la terre, R et de l'altitude du satellite.

2- Un autre satellite de masse m_2 est en orbite autour de la terre à une distance r_2. Etablir la relation liant les périodes de rotation de ces deux satellites en fonction des rayons de leurs orbites (3ème loi de Kepler).

3- Si le rayon du premier satellite est R (par rapport à la surface) et celui du deuxième est 4R, quelle est le rapport entre leur période.

Exercice 04:



Deux corps identiques (A) et (B) de masse $M_A = M_B = m = 2kg$, en contact l'un avec l'autre reposent sur un plan horizontal (voir figure) caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d.

On applique au corps (A) une force oblique $\vec{F}$ faisant un angle α=30° avec l'horizontale.

1- Quelle force $\vec{F}$ minimale faut-t-il appliquer au corps (A) pour rompre l'équilibre du système.

2- a) Représenter qualitativement les forces appliquées aux corps (A) et (B) séparément.

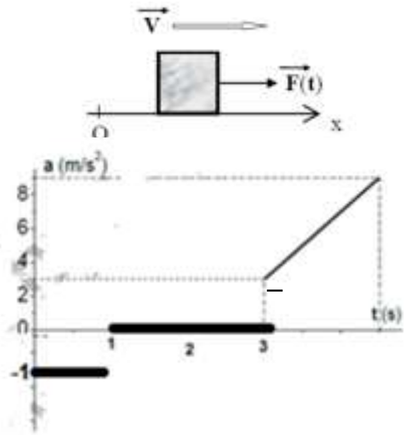
b) Déterminer, dans ces conditions, la force de contact entre les deux corps (A) et (B).

3- On applique une force $\vec{F}$ de module égal à 30N, les corps (A) et (B) démarrent en même temps avec une accélération a= $4m/s^2$, qui reste constante tout au long du mouvement.

a) Déterminer la force de frottement exercée par le plan sur les deux corps.

b) En déduire le coefficient de frottement dynamique μ_d. **On donne** μ_s=0.4.

Exercice 05 :



Une masse m = 0,5 kg glisse avec frottement sur un plan horizontal suivant une trajectoire rectiligne sur l'axe Ox. Cette masse est constamment soumise à son poids et à la force de contact qu'exerce le plan sur elle. En plus, à partir de t = 3s, une troisième force variable, constamment dirigée vers les x positifs, est appliquée sur cette masse. Il en résulte un mouvement dont l'accélération a(t) est donnée sur la figure ci-contre. A l'instant initial t = 0 s, la vitesse de la masse est V_0 = 1m/s

1°)- Tracer le graphe V(t) pour 0s ≤ t ≤ 4s ;

2°)

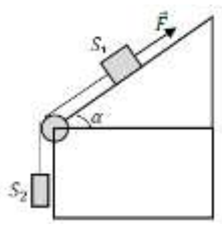
a- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à m pour t≥3s.

b- Sachant que le coefficient de frottement dynamique entre la masse m et le plan est μ_d = 0,1, représenter les forces qui agissent sur la masse m à t = 4s.

c-Donner l'expression analytique de F(t) pour t ≥3s. On prendra g=10m/s^2

Exercice 06 :

Deux corps S_1 et S_2, assimilés à des points matériels, ont les masses suivantes : $m_1=5\ kg,_2=3\ kg$. Les corps sont liés par un fil idéal (souple, inextensible et de masse négligeable) passant par une poulie idéale (masse négligeable). Le corps S_1 glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha=35°$ par rapport à l'horizontale, sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$. Le corps S_1 subit des forces de frottement dont les coefficients statique et cinétique sont respectivement $\mu_s=0.35$ et $\mu_c=0.20$ (voir figure ci-contre). On prend $g=9.81\ m.s^{-2}$.



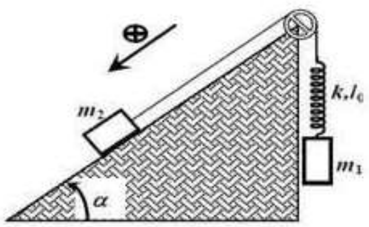
1. Déterminer la valeur minimale F_{min} de le force $\vec{F}$ pour que le système reste en équilibre (empêcher S_1 de se déplacer vers le haut).
2. On prend $F=100\ N$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Exercice 07:

Soit le système représenté par la figure ci-contre. Il est composé d'un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Un ressort de constance de raideur $\boldsymbol{k}$ et de longueur à vide $\boldsymbol{l_0}$ est lié à une masse $\boldsymbol{m_1}$ .La deuxième extrémité du ressort est reliée à une masse $\boldsymbol{m_2}$ à l'aide d'un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie.

On libère les masses sans vitesse initiale. Après certain temps, on remarque que l'élongation du ressort $\Delta\boldsymbol{l}$ est constante, donc les accélérations des deux masses sont égales en module ($a_1 = a_2 = a$).

<u>Remarque :</u> Les masses de la poulie, du ressort et du fil sont négligeables.



1- Dans le cas où le plan est lisse (pas de frottement) :

1.1 Quelle est l'expression de l'accélération a des deux masses ?

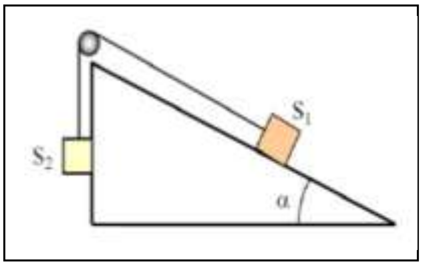
1.2 Quelle est la condition pour que le système se déplace selon le sens positif indiqué sur la figure ?

1.3 Déduire l'expression de l'élongation Δl du ressort ?

1.4. Si le coefficient de frottement dynamique du plan est μ_d et pour $m_2 = 3m_1$, Trouver l'expression de l'accélération a' des deux masses ?

Exercice 08:

Deux boites S_1 et S_2 de masses $m_1 = 1\ kg$ et m_2 liées par un fil inextensible qui passe par une poulie de masse négligeable et d'axe fixe. La masse m_1 glisse sur un plan incliné non lisse qui fait un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre). Les coefficients de frottements statique et dynamique sont respectivement $\mu_s = 0.7$ et $\mu_d = 0.3$. On prendra $g = 9.8\ m/s^2$.



1. Calculer la masse minimale m_{2min} de S_2 qui maintient le système en équilibre (S_1 ne glisse pas vers le haut) ;

2. On prend $m_2 = 1.5\ kg$. On abandonne S_2 sans vitesse initiale, d'une hauteur h, durant un temps $t_h = 2\ s$:

2.1. Calculer les accélérations prises par les deux masses ;

2.2. Calculer la hauteur h. Déduire les vitesses des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol.

Exercice 09:

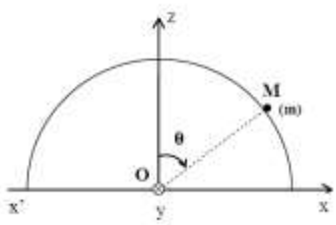
Un point matériel de masse $m = 20kg$ est lâché verticalement sans vitesse initiale. L'air exerce sur ce point une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v$ (α un coefficient de frottement positif). On constate que le point matériel atteint une vitesse limite v_{lim} de 45 $m.s^{-1}$. On donne $g = 9.81\ m.s^{-2}$.

1. Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
2. Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
3. En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation scalaire du mouvement.
4. Trouver l'expression du v(t).
5. Trouver l'expression du coefficient α en fonction de v_{lim}, m et g. En déduire la valeur de α.

Exercice 10 :

On considère un point matériel de masse m qui glisse sans frottements, sur une demi- sphère de rayon R, de centre O, posée sur le plan horizontal xOy (tu veux dire le plan XOZ), l'axe Oz étant vertical ascendant (voir figure).

A l'instant t = 0 s, la masse est abandonnée sans vitesse initiale, en un point M du plan xOz défini par l'angle θ_o = (Oz, OM).



1- Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse m. En déduire que le mouvement s'effectue entièrement dans le plan xOz.

2- Calculer la vitesse et l'accélération de m en coordonnées polaires.

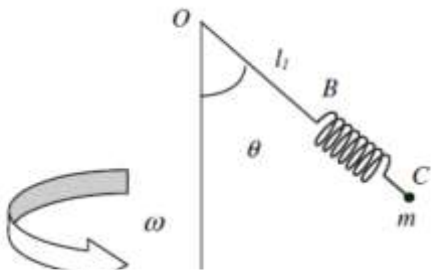
3- Calculer le moment cinétique de m par rapport à O. En appliquant le théorème du moment cinétique, Trouver une équation différentielle régissant θ(t).

4- Retrouver cette dernière équation à partir de la relation fondamentale de la dynamique.

Exercices Supplémentaires

Exercice S1 :

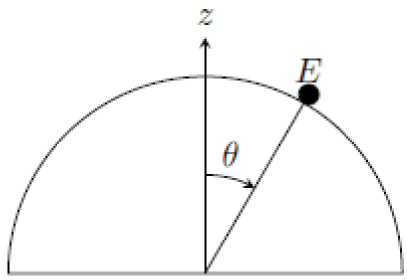
On dispose d'un ressort à boudin *BC*, de raideur k = 20 N.m^{-1}, de masse négligeable, de longueur à vide l_o = 10 cm et d'une masse m = 100 g considérée comme ponctuelle fixée à l'une de ses extrémités.
On attache l'extrémité *B* du ressort à un fil inextensible de masse négligeable, de longueur l_1 = 40 cm. L'autre extrémité du fil est fixée à l'extrémité supérieure d'une tige verticale qui, en tournant, entraîne le fil, le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme.
Après un régime transitoire, l'angle **θ** entre le fil et la tige verticale prend une valeur constante égale à 60°.



1. Calculer la tension du ressort et sa longueur.
2. Quelle est, en nombre de tours par seconde, la vitesse de rotation de la tige ?
On prendra g = 10 m.s^{-2}.

Exercice S2 :

Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau E de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance sans vitesse initiale. L'enfant glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo. Sa position est repérée par l'angle θ. Pour simplifier, l'igloo est supposé sphérique de rayon R.



1 - Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?
2 - En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

3 - En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.
4 - L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle et à quelle vitesse?

Exercice S3 :

Un footballeur tire un penalty à l'aide d'un ballon de masse $m = 450\ g$ avec une force d'impact de $560\ N$. La durée de frappe est de $20\ ms$.

1. Ecrire l'expression de la quantité de mouvement du ballon.
2. Ecrire le théorème de la variation de la quantité de mouvement. En déduire la vitesse du ballon juste après la frappe.
3. En supposant que le mouvement du ballon est rectiligne uniforme, trouver le temps nécessaire pour que le ballon arrive à la ligne de buts distancée de $11\ m$ du point du tir. Pensez-vous que le gardien aura le temps d'intercepter le ballon ?

Exercice S4 :

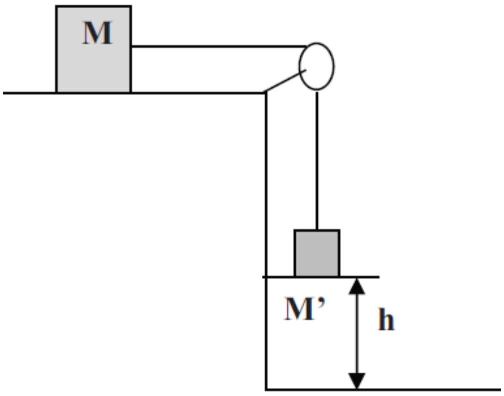
Un trou noir résulte de l'effondrement du cœur d'une étoile massive. C'est une « boule » de matière très petite qui renferme une masse extraordinairement grande et dont la lumière ne peut s'échapper. Ainsi, un trou noir est invisible. Il peut être détecté par l'influence qu'il exerce sur les étoiles et autres objets qui lui sont proches.

1. On considère un trou noir d'une masse 10 fois celle du Soleil et ayant la forme d'une sphère de 3 km de diamètre. Calculer la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée sur un objet de masse $m = 1\ kg$ placé à la surface du trou noir.
2. Calculer la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée sur le même objet placé à la surface du Soleil, puis à la surface de la Terre et comparer les 3 valeurs.

On donne : $G = 6.67\ 10^{-11} S.I$, $g = 9.8\ N.kg^{-1}$, $M_{Terre} = 5.98\ 10^{24} kg$, $M_{soleil} = 2\ 10^{30} kg$

$$R_{Terre} = 6380\ km\ , R_{soleil} = 7.10^{5} km$$

Exercice S5 :



Deux corps M et M' de masse m et m' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_S et cinématique μ_c .
1. Donner l'expression de la masse m'_{min}en fonction de m et de μ_S pour que le système se mette en mouvement.
2 On prend maintenant un masse $m' = 4\ kg$, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:
a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier.
b- Calculer l'accélération dans la première phase.
c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.
d- Calculer l'accélération dans la deuxième phase
e- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M. Donner sa valeur.

Exercice S6 :

La fusée « Apollo » effectue un voyage de la terre à la lune. La lune est à la distance $3.84.10^{8} m$ de la terre. La masse de la terre est $5.98.10^{24} kg$ tandis que celle de la lune vaut $7.36.10^{22} kg$.
1. Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la terre lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?
2. Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?
3. Quelle est l'intensité du champ résultant du champ de pesanteur de la terre et celui de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?
4. A quelle distance du centre de la terre le champ résultant des deux champs terrestre et lunaire s'annule-t-il?

Corrigé de la série N°3

Exercice 1 :

L'expression de la force : $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$

Le vecteurs accélération. D'après le PFD : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{m}$

Le vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \int \vec{a}\, dt = \int \frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{m} dt = \frac{\vec{F}_0}{m} \int \sin(\omega t)\, dt = -\frac{\vec{F}_0}{m\omega}\cos(\omega t) + \vec{C}_1$

Condition initiale : $\vec{v}(t=0) = \vec{0} \rightarrow -\frac{\vec{F}_0}{m\omega} + \vec{C}_1 = \vec{0} \rightarrow \vec{C}_1 = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}$

$$\vec{v}(t) = -\frac{\vec{F}_0}{m\omega}\cos(\omega t) + \frac{\vec{F}_0}{m\omega} = (1-\cos(\omega t))\frac{\vec{F}_0}{m\omega}$$

Le vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}\, dt = \int (1-\cos(\omega t))\frac{\vec{F}_0}{m\omega} dt = \left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)\frac{\vec{F}_0}{m\omega} + \vec{C}_2$

Condition initiale : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{C}_2 = \vec{0}$ donc, $\overrightarrow{OM}(t) = \left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)\frac{\vec{F}_0}{m\omega}$

La quantité de mouvement : $\vec{P}(t) = m\vec{v}(t) = (1-\cos(\omega t))\frac{\vec{F}_0}{\omega}$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{d(1-\cos(\omega t))\frac{\vec{F}_0}{\omega}}{dt} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$$

$m\vec{a} = m\left(\frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{m}\right) = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$ donc la relation est vérifier.

Exercice 2:

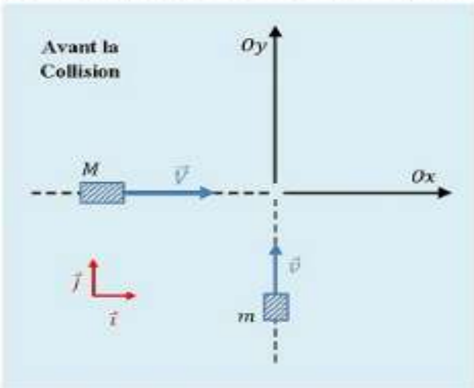
Solution :

Soit le système isolé constitué des deux véhicules ; le camion M et la voiture m. De sorte que sa quantité de mouvement soit conservée durant tout le processus.

Avant collision

Avant la collision, le camion M roulait à une vitesse $\vec{V}$ parallèle à l'axe Ox, et le véhicule m à une vitesse $\vec{v}$ parallèle à l'axe Oy. Notre système avait alors une quantité de mouvement $\vec{P}$ donnée par :

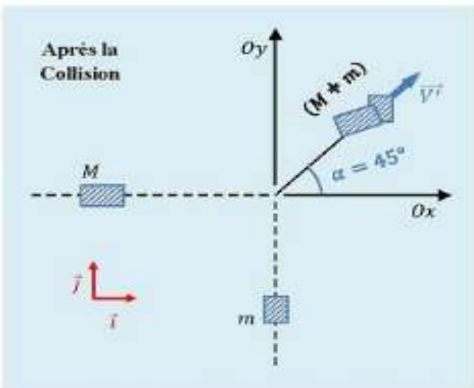
$$\vec{P} = M\vec{V} + m\vec{v}. \qquad (01)$$



Après collision

Après la collision, les deux véhicules restent emboutis l'un dans l'autre et constituent un seul corps de masse $(M+m)$ dont la vitesse $\vec{V'}$ fait un angle 45° avec l'axe Ox. La quantité de mouvement $\vec{P'}$ du système est alors :

$$\vec{P'} = (M+m)\vec{V'}. \qquad (02)$$



Conservation de la quantité de mouvement

Comme le système est isolé la quantité de mouvement est donc conservée, d'où :

$$\vec{P} = \vec{P'}. \qquad (03)$$

Ou :

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{V'}. \qquad (04)$$

Or, on sait que deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales. Ce, revient à écrire les équations suivantes :

Projection sur Ox :

$$MV_x + mv_x = (M+m)V'_x, \qquad (05)$$

donc :

$$MV = (M+m)V'\cos\alpha. \qquad (06)$$

Projection sur Oy :

$$MV_y + mv_y = (M+m)V'_y, \quad (07)$$

d'où :

$$mv = (M+m)V' \sin\alpha. \quad (08)$$

Le rapport entre (08) et (06) donne après simplifications :

$$\frac{mv}{MV} = \tan\alpha. \quad (09)$$

Donc :

$$v = \frac{M}{m} V \tan\alpha. \blacksquare \quad (10)$$

A.N. :

$$v = 320\, km/h. \blacksquare \quad (11)$$

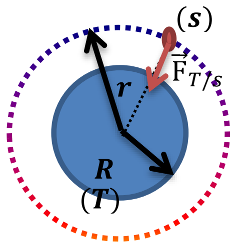
Vitesse impossible pour une petite voiture normale, donc le témoin n'a pas raison.

Exercice 3:

1.

$\vec{F} = -G\frac{m_1 M}{r^2}\vec{u}_r = m_1\left(-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\right) = m_1\vec{g}$ où $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -g\vec{u}_r$

Au voisinage de la terre :



$$\vec{g}_0 = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}_r = -g_0\vec{u}_r$$

Donc :

$$g = \left(\frac{R}{r}\right)^2 g_0 = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

2-

$$F = -G\frac{m_1 M}{{r_1}^2}\vec{u}_r = m_1 a_n \ (mouvement\ circulaire\ uniforme)$$

D'où

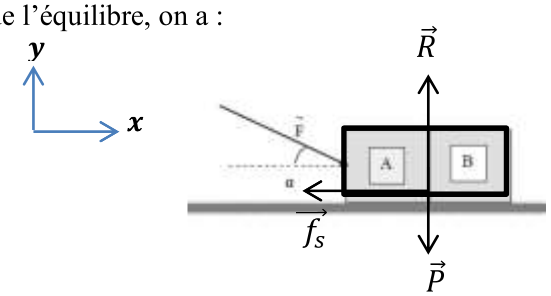
$$g = a_n = m_1\frac{{v_1}^2}{r} \text{ où } v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$$

Donc :

$$G\frac{M}{{r_1}^2} = 4\pi^2\frac{{r_1}^2}{{T_1}^2} \Rightarrow \frac{{r_1}^3}{{T_1}^2} = G\frac{M}{4\pi^2} = Const \Rightarrow \frac{{r_1}^3}{{T_1}^2} = \frac{{r_2}^3}{{T_2}^2}$$

Exercice 04:

1- On considère les deux masses comme un seul système. A la limite de l'équilibre, on a :



$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_s} = \vec{0}$

Par projection :

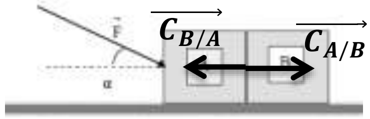
$$\begin{cases} Fcos(\alpha) - f_s = 0 \\ R - P - Fsin(\alpha) = 0 \Rightarrow R = P + Fsin(\alpha) \end{cases}$$

Sachant que : $f_s = \mu_s R\ et\ P = 2mg$, on obtient :

$$F = \frac{\mu_s}{(cos(\alpha) - \mu_s sin(\alpha))} 2mg = 23.57N$$

2- (a) :

Forces sur (A) : $\overrightarrow{P_A}$, $\vec{R}$, $\vec{F}$, $\overrightarrow{f_s}$ et $\overrightarrow{C_{B/A}}$ (B empêche A de se déplacer)



Forces sur (B) : $\overrightarrow{P_B}$, $\vec{R}$, $\overrightarrow{f_s}$ et $\overrightarrow{C_{A/B}}$ (A pousse B pour le déplacer)

(b) :

En appliquant le PFD sur A (ou sur B) :

$$Sur\ A: \quad \sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P_A} + \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{f_s} + \overrightarrow{C_{B/A}} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F\cos(\alpha) - f_s - C_{B/A} = 0 \\ R - P_A - F\sin(\alpha) = 0 \Longrightarrow R = P_A + F\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$Sur\ B: \quad \sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P_B} + \vec{R} + \overrightarrow{f_s} + \overrightarrow{C_{A/B}} = \vec{0} \quad avec\ \overrightarrow{C_{A/B}} = -\overrightarrow{C_{B/A}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -f_s + C_{A/B} = 0 \Longrightarrow f_s = C_{A/B} \\ R - P_B = 0 \Longrightarrow R = P_B \end{cases}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{C_{B/A} = C_{B/A} = \mu_s mg = 7.85\ N}$$

3- Considérons les deux corps comme un seul système:

$$\sum \vec{F}_{ex} = 2m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{f_s} = 2m\vec{a}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F\cos(\alpha) - f_s = 2ma \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R - P - F\sin(\alpha) = 0 \Longrightarrow R = P + F\sin(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2) \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow f_s = F\cos(\alpha) - 2ma = 54.24N$$

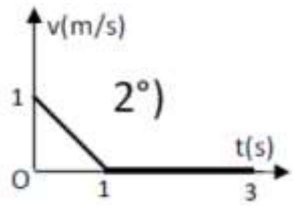
$$(2) \Longrightarrow f_s = \mu_s R \Longrightarrow \mu_s = \mathbf{0.18}$$

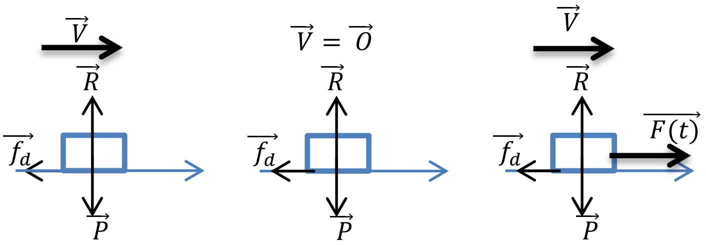
Exercice N°7

1- Graphe de v(t)

t(s)	[0,1]	[1,3]	t=3s	t>3s
a(m/s^2)	-1	0	discontinue	Droite a(t)=4(t-3)+3
v(m/s)	Droite entre v(0)=1 et v(1)=0	V=0		parabole
Mouvement	MRUR	Repos	Limite de l'équilibre	MRA

Avant t = 1s, le mouvement est retardé jusqu'à l'arrêt par la force de frottement $\vec{f_d}$. On peut calculer μ_d dans cette phase.
Entre 1s et 2s, le corps reste au repos sous l'action de $\vec{P}$ et $\vec{R}$.
Après 2s, la force $\vec{F}$ commence à agir mais elle n'est pas assez grande pour faire accélérer le corps. A t = 3s, l'accélération fait un saut et le corps demarre, c'est la limite de l'équilibre





$t \leq 1s$ $\quad$ $1 \leq t \leq 3s$ $\quad$ $t > 3s$

2-

a)

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F(t)} + \vec{f_s} = m\vec{a}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F(t) - f_s = ma \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R - P -= 0 \Longrightarrow R = P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Avec : $f_s = \mu_d R = \mu_d mg$

b)

A t=4s : a=7m/s^2 , $\mu_d = 0.1$ et g=10m/s^2

$$(1) \Longrightarrow F(t) - f_s = ma \Longrightarrow F(t) = ma + \mu_d mg \Longrightarrow F(t = 4s) = 4N$$

Représentation de la force : quantitativement (avec une échelle) et qualitativement.

c) L'expression de la force $\vec{F(t)}$ (pour t>3)

Pour t>3s : a(t)=4t-9

$$(1) \Longrightarrow F(t) = ma + \mu_d mg = m(4t - 9) + \mu_d mg \Longrightarrow F(t) = 2t - 4$$

Exercice N°6

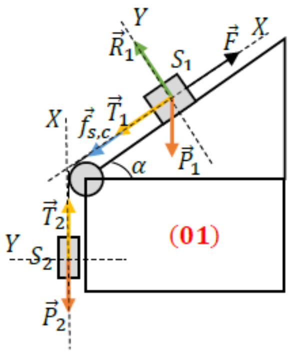
1. La valeur minimale F_{min} pour que le système reste en équilibre :

$$\text{Equilibre : } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} (m_1) : \ \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0} \\ (m_2) : \ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases} \ (0.5)$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1) : \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = 0 \ (1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0 \ (2) \end{cases} \ (0.5); \ (m_1) : \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = 0 \ (3) \\ 0 = 0 \end{cases} \ (0.25)$$

Les composante du poids : $P_{1x} = m_1 g \sin\alpha$; $P_{1y} = m_1 g \cos\alpha$



La force de frottement statique : $\begin{cases} f_s = \mu_s R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_s = \mu_s m_1 g \cos\alpha \ (0.5)$

La tension du fil : $\begin{cases} (1) : \ T_1 = F - P_{1x} - f_s \\ (3) : \ T_2 = P_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $T_1 = T_2 \ (0.25)$

Ce qui donne l'expression de F_{min} :

$$F_{min} = (m_1(\sin\alpha \ + \mu_s \cos\alpha) + m_2)g = 71.63 \ N \ (0.5)$$

2. On prend $F = 100 \ N$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Le système va se mettre en mouvement car $F > F_{min}$

$$PFD : \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1) : \ \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = m_1 \vec{a}_1 \\ (m_2) : \ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_1 \vec{a}_2 \end{cases} \ (0.5)$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1) : \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = m_1 a_1 \ (1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0 \ (2) \end{cases} \ (0.5); \ (m_1) : \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = m_2 a_2 \ (3) \\ 0 = 0 \end{cases} \ (0.25)$$

La force de frottement cinétique : $\begin{cases} f_c = \mu_c R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_c = \mu_c m_1 g \cos\alpha \ (0.5)$

La tension du fil : $\begin{cases} (1) : \ T_1 = F - P_{1x} - f_c - m_1 a_1 \\ (3) : \ T_2 = P_2 + m_2 a_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $\begin{cases} T_1 = T_2 \\ a_1 = a_2 = a \end{cases} (0.5)$

Ce qui donne l'expression de l'accélération :

$$a = \frac{F - (\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha) m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} (0.5) = 4.30 \ m.s^{-2} \ (0.25)$$

Par conséquent, la tension du fil est donnée par :

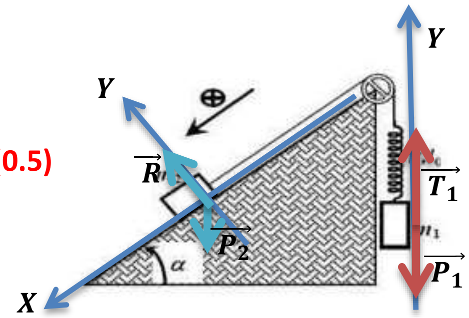
$$T = T_2 = T_2 = P_2 + m_2 a = m_2(a+g) = 42.33\ N\ (0.5)$$

Exercice N°7

1. Dans le cas où le plan est lisse (pas de frottement) :

1.1 L'accélération a des deux masses

(0.5)



En appliquant le PFD sur les deux masses :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a}$$

Sur m_1 :

$$\vec{P_1} + \vec{T_1} = m_1 \vec{a_1}$$

Par projection sur (OY), on obtient :

$$-P_1 + T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow -m_1 g + T_1 = m_1 a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sur m_2 :

$$\vec{P_2} + \vec{T_2} + \vec{R} = m_2 \vec{a_2}$$

Par projection :

$$\begin{cases} (OX):\ P_{2x} - T_2 = m_2 a_2 \\ (OY):\quad R - P_{2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2 g \sin\alpha - T_2 = m_2 a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ R - m_2 g \cos\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Puisque $a_1 = a_2 = a$ et $T_1 = T_2 = T$ (fil iextensibe , Les masses de la poulie, du ressort et du fil sont négligeables)

En additionnant (1) et (2),on trouve :

$$-m_1 g + T_1 + m_2 g \sin\alpha - T_2 = m_1 a_1 + m_2 a_2 \Rightarrow -m_1 g + T_1 + m_2 g \sin\alpha - T_2 = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{g(m_2 \sin\alpha - m_1)}}{\boldsymbol{m_1 + m_2}}$$

1.2 La condition pour que le système se déplace selon le sens positif indiqué sur la figure

Pour que le système se déplace dans le sens positif indiqué sur la figure, il faut que $a > 0$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{g(m_2 \sin\alpha - m_1)}{m_1 + m_2} > 0 \Rightarrow m_2 \sin\alpha - m_1 \Rightarrow \boldsymbol{m_2 \sin\alpha > m_1}$$

1.3 L'expression de l'élongation $\Delta \boldsymbol{l}$ du ressort

En remplaçant l'accélération dans l'équation (1), on obtient :

$$-m_1 g + T_1 = m_1 \frac{g(m_2 \sin\alpha - m_1)}{m_1 + m_2}$$

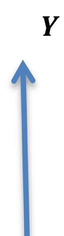
Avec $T_1 = k \vartriangle l$

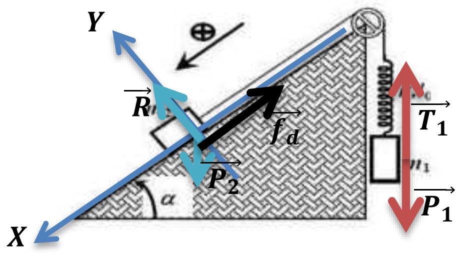
Il vient :

$$\vartriangle \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{m_1 m_2}}{\boldsymbol{m_1 + m_2}} . \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{k}} \ (\boldsymbol{\sin\alpha + 1})$$

2. Mouvement avec frottement

L'accélération a' des deux masses :





En appliquant le PFD sur les deux masses :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\overrightarrow{a'}$$

Sur m_1 :

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} = m_1\overrightarrow{a'_1}$$

Par projection sur (OY), on obtient :

$$-P_1 + T_1 = m_1 a'_1 \Rightarrow -m_1 g + T_1 = m_1 a'_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sur m_2 :

$$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} + \vec{R} + \overrightarrow{f_d} = m_2\overrightarrow{a'_2}$$

Par projection :

$$\begin{cases} (OX):\ P_{2x} - T_2 - f_d = m_2 a'_2 \\ (OY):\quad R - P_{2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2 g \sin\alpha - T_2 - f_d = m_2 a'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ R - m_2 g\cos\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

L'équation (3) donne : $R = m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow f_d = \mu_d R = \mu_d m_2 g\cos\alpha$,On obtient :

$$m_2 g\sin\alpha - T_2 - \mu_d m_2 g\cos\alpha = m_2 a'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Puisque $a'_1 = a'_2 = a'$ et $T_1 = T_2 = T$ (fil iextensibe , Les masses de la poulie, du ressort et du fil sont négligeables)

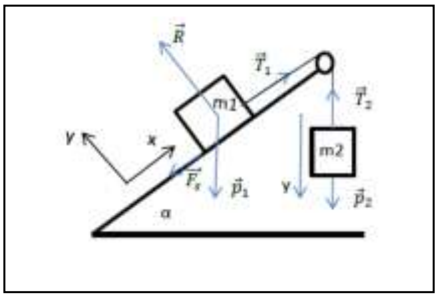
En additionnant (1) et (4),on trouve :

$$-m_1 g + T_1 + m_2 g\sin\alpha - T_2 - \mu_d m_2 g\cos\alpha = m_1 a'_1 + m_2 a'_2$$

$$\Rightarrow a' = \frac{g(m_2\sin\alpha - m_1)}{m_1 + m_2} - \frac{\mu_d m_2 g\cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

Sachant que $m_2 = 3m_1 \Rightarrow \boldsymbol{a'} = \frac{\boldsymbol{g[3(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha) - 1]}}{\boldsymbol{4}}$

Exercice N°8



1. La masse minimale m_{2min} de S_2 :

En appliquant le PDF :

Sur S1 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F_s} = \vec{0}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX): -P_1 \sin\alpha + T_1 - F_s = 0 & (1) \\ (OY): -P_1 \cos\alpha + R = 0 & (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_s R = \mu_s P_1 \cos\alpha$$

L'équation (1) devient :

$$P_1 (\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) + T_1 = 0 \;\; \rightarrow T_1 = \; P_1 (\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) \quad (3)$$

Sur S2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Projections :

$$(OY): \quad P_2 - T_2 = 0$$

$$T_2 = P_2 \;\; (4)$$

Le fil est inextensible et de mass négligeable $T_2 = T_1$

$$P_2 = P_1 (\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) \rightarrow m_{2min} = \; m_1 (\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) = 1.1kg$$

2. On prend $m_2 = 1.5 \; kg$:

2.1. L'accélération prise par les deux masses :

On a $m_2 > m_{2min}$ le mouvement se fait dans le sens de m_2 on applique le principe fondamental de la dynamique :

Sur S$_1$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F_s} = m_1 \vec{a}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX): -P_1 \sin\alpha + T_1 - F_s = m_1 a & (1) \\ (OY): \quad -P_1 \cos\alpha + R = 0 & (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_c R = \mu_c P_1 \cos\alpha$$

L'équation (1) devient :

$$-P_1\,(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) + T_1 = m_1 a \;\; (3)$$

Sur S2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$$

Projections :

$$(OY): \quad P_2 - T_2 = m_2 a (4)$$

Le fil est inextensible et de masse négligeable $T_2 = T_1$. (3) + (4)

$$-P_1\,(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) + P_2 = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{m_2 + m_1\,(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g = 2.91 m/s^2$$

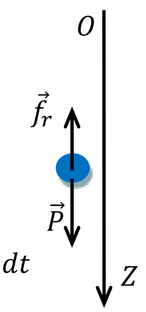
2.2. La hauteur h

$$h = \frac{1}{2} a t_h^2 = 5.83m$$

La vitesse des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol :

$$v = a t_h = 2.91 m/s$$

<u>Exercice N°9</u>



1. Voire le schéma

2. Equation vectoriel du mouvement

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{f}_r = m\vec{a}$$

3. Projection sur oz

$$P - f_r = ma \rightarrow mg - \alpha v = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v \rightarrow \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = dt \rightarrow \left(-\frac{m}{\alpha}\right)\frac{\left(-\frac{\alpha}{m}\right)dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = dt$$

$$\frac{\left(-\frac{\alpha}{m}\right)dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = -\frac{\alpha}{m}dt \rightarrow \int \frac{\left(-\frac{\alpha}{m}\right)dv}{g - \frac{\alpha}{m}v} = -\int \frac{\alpha}{m}dt \rightarrow \ln\left(g - \frac{\alpha}{m}v\right) = -\frac{\alpha}{m}t + C'$$

$$g - \frac{\alpha}{m}v = C.\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \rightarrow v = \frac{gm}{\alpha} + C'.exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$$

à $t = 0s \rightarrow v = 0 \rightarrow 0 = \frac{gm}{\alpha} + C' \rightarrow C' = -\frac{gm}{\alpha}$

$v = g\tau(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

4. l'expression de α :

On a $v = \frac{gm}{\alpha}(1 - exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$ lorsque $v = v_{lim}$ le mouvement devient uniforme c'est-à-dire la vitesse est indépendante du temps donc $v = v_{lim} = \frac{gm}{\alpha}$

Autre méthode :

$$v_{lim} = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{gm}{\alpha}(1 - exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) = \frac{gm}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{gm}{v_{lim}} \rightarrow \alpha = 4.36\ kgs^{-1}$$

$$g = \frac{m_1(sin\alpha - \mu_s cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 0.087ms^{-2}$$