Série de TD n°4 (à traiter en 02 séances)

Exercice 01 :

On considère un pendule simple constitué d'une bille de masse m suspendue à un fil inextensible et sans masse de longueur l. Le point de suspension est noté O, et la position du pendule est repérée par l'angle θ entre le fil et la verticale. On néglige les frottements de l'air.

1. Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la bille par rapport au point O. On exprimera $\vec{L}_O$ en fonction de m, l, θ et du vecteur unitaire $\vec{k}$ perpendiculaire au plan de mouvement (OXY).
2. Calculer la dérivée temporelle $d\vec{L}_O/dt$.
3. Calculer les moments des forces qui s'exercent sur la bille.
4. En utilisant le théorème du moment cinétique, déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. Montrer que pour les petites oscillations $(\sin\theta \approx \theta)$, le mouvement est harmonique et déterminer la pulsation propre ω_0.

Exercice 02 :

Un pendule conique est constitué d'une masse ponctuelle m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l, dont l'autre extrémité est fixée en un point O. La masse décrit un mouvement circulaire uniforme horizontal, le fil formant un angle constant θ avec la verticale. On note $\vec{g} = -g\vec{k}$ le champ de pesanteur, ω la vitesse angulaire constante de la masse autour de l'axe vertical et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ la base cylindrique associée au mouvement.

1. Exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la masse m dans la base cylindrique. En déduire son vecteur vitesse $\vec{v}$.
2. Calculer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la masse par rapport au point fixe O.
3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse. Calculer le moment résultant $\vec{\tau}_O$ de ces forces par rapport au point O.
4. Appliquer le théorème du moment cinétique en O. En déduire une relation vectorielle, puis ses composantes utiles.
5. Montrer que l'angle θ est constant au cours du temps (hypothèse du pendule conique).
6. Établir l'expression de la vitesse angulaire ω en fonction de g, l et θ.
7. Retrouver la période T du mouvement circulaire horizontal.

Exercice 3 :

Une planète de masse m décrit une orbite elliptique autour du Soleil, situé en l'un des foyers de l'ellipse. On note : r_P la distance Soleil–planète au périhélie (point le plus proche), r_A la distance à l'aphélie (point le plus éloigné), v_P et v_A les vitesses de la planète en ces deux points.

1. Justifier que le moment cinétique de la planète par rapport au centre du Soleil se conserve au cours du mouvement.
2. En déduire une relation entre v_P, v_A, r_P et r_A.
3. Calculer le rapport v_P/v_A si $r_A = 2r_p$. Interpréter ce résultat.

Corrigé de la série de TD n°4

Exercice 1 :

1. Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la bille par rapport au point O. En coordonnées polaires :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m(L\vec{e}_r) \wedge \left(L\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta = mL^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

2. Calculer la dérivée temporelle $d\vec{L}_O/dt$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k}$$

3. Calculer les moments des forces qui s'exercent sur la bille :

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{r} \wedge \vec{p} = -mgl\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{r} \wedge \vec{T} = \vec{0}\ (\vec{T}\,//\,\vec{r})$$

4. En utilisant le théorème du moment cinétique, déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\tau}_O(\vec{F}_{ext}) \rightarrow ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} = -mgl\sin\theta\,\vec{k} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Montrer que pour les petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$), le mouvement est harmonique et déterminer la pulsation propre ω_0.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \rightarrow \theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Exercice 2 :

1. Exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la masse m dans la base cylindrique. En déduire son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{r} = l\sin\theta\,\vec{e}_r - l\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = l\omega\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

2. Calculer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la masse par rapport au point fixe O :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = m\omega l^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_r + m\omega l^2\sin^2\theta\,\vec{k} = L_r\vec{e}_r + L_z\vec{k}$$

3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse. Calculer le moment résultant $\vec{\tau}_O$ de ces forces par rapport au point O :

$$\vec{\tau}_O(\vec{T}) = \vec{0}\ (\vec{T}\,//\,\vec{r})$$

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{r} \wedge \vec{p} = mgl\sin\theta\,\vec{e}_\theta = \vec{\tau}_O$$

4. Appliquer le théorème du moment cinétique en O. En déduire une relation vectorielle, puis ses composantes utiles :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

Comme $\vec{k}$ est fixe, seule la dérivée de la composante radiale contribue :

$$L_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = L_r\omega\vec{e}_\theta = m\omega^2 l^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\theta = \vec{\tau}_O = mgl\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\omega^2 l\cos\theta = g$$

5. Montrer que l'angle θ est constant au cours du temps (hypothèse du pendule conique) :

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l} = cste \rightarrow \theta = cste$$

6. Établir l'expression de la vitesse angulaire ω en fonction de g, l et θ :

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

7. Retrouver la période T du mouvement circulaire horizontal.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

<u>Exercice 3 :</u>

1. Conservation du moment cinétique :

La seule force agissant sur la planète est la force gravitationnelle exercée par le Soleil. Cette force est centrale : elle est toujours dirigée selon le vecteur $\vec{r}$ reliant le Soleil à la planète. Le moment de cette force par rapport au centre du Soleil est donc :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}_g = (r\vec{e}_r) \wedge \left(-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\right) = \vec{0}$$

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_O = cste$$

Le moment cinétique de la planète par rapport au Soleil se conserve.

2. Relation entre les vitesses et les distances :

Au périhélie et à l'aphélie, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est perpendiculaire au vecteur position $\vec{r}$ (ces points sont les extrémités du grand axe de l'ellipse, où la trajectoire est localement orthogonale au rayon vecteur). Donc, la norme du moment cinétique en ces points vaut :

$$L = mrv$$

Par conservation de L, on a :

$$mr_A v_A = mr_P v_P \rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

3. Calculer le rapport v_P/v_A si $r_A = 2r_p$:

$$\frac{v_P}{v_A} = 2$$

Ainsi, la planète va deux fois plus vite au périhélie qu'à l'aphélie.

- Lorsque la planète est plus proche du Soleil (r petit), elle se déplace plus vite. Le rayon vecteur balaie « rapidement » une petite portion de cercle.
- Lorsqu'elle est plus éloignée (r grand), elle ralentit. Le rayon vecteur balaie « lentement » une portion plus étendue.

Mais l'aire balayée par unité de temps reste constante, ce qui reflète la conservation du moment cinétique. C'est la deuxième loi de Kepler.