

Exo

(1) On considère l'application f définie par :

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow A$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{ax+b}{x-1}$$

Comment doit-on choisir les réels a et b et l'ensemble A pour que f soit bijective ?(2) On considère l'application g définie par :

$$g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

a. Montrer que g est injective.b. Calculer $g^{-1}(\{2\})$. g est-elle surjective ?c. Déterminer l'ensemble A pour que $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow A$ soit bijective. Donner l'application réciproque g^{-1} .

Reponse

Soit l'application $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow A$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{x-1}$ a) f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (0,5)Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{ax_1+b}{x_1-1} = \frac{ax_2+b}{x_2-1} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow (ax_1+b)(x_2-1) = (ax_2+b)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow (a+b)x_1 = (a+b)x_2 \quad (0,5)$$

donc f est injective $\Rightarrow a+b \neq 0$.b) f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in A, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\}: f(x) = y$ (0,5)soit $y \in A$.

$$y = \frac{ax+b}{x-1} \Rightarrow yx - y = ax + b \Rightarrow x(y-a) = y+b \quad (0,5)$$

par suite $x = \frac{y+b}{y-a}$ (0,5)

Donc f est surjective $\Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{a\}$.

Enfin f est bijective $\Leftrightarrow (a+b \neq 0) \wedge A = \mathbb{R} - \{a\}$. (1)

2) Soit l'application $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

a) Montrons que g est injective

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1) \quad (0,5)$$

donc g est injective $\Rightarrow x_1 = x_2$ (0,5)

b) calculons $g^{-1}(\{2\})$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2\} \quad (0,5) \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \frac{2x+1}{x-1} = 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \frac{2x+1}{x-1} = 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / 2x+1 = 2(x-1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / 2x+1 = 2x-2\} \\ &= \emptyset. \quad (0,5) \end{aligned}$$

g n'est pas surjective car. $\nexists x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2$.

c. g surjective $\Leftrightarrow \forall y \in A, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} : g(x) = y$.

Soit $y \in A$.

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = y+1.$$

par suite

$$x = \frac{y+1}{y-2} \quad (0,5)$$

Donc g est surjective $\Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{2\}$.

L'application réciproque $g^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$.

$$g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2} \quad (0,5)$$