

Exercice 1 :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

(a)

$$2|x| = |(x+y) + (x-y)| \Rightarrow 2|x| \leq |x+y| + |x-y|$$

$$2|y| = |(x+y) + (y-x)| \Rightarrow 2|y| \leq |x+y| + |x-y|$$

d'où

$$|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) $\forall x, y \geq 0$, on a

$$x+y \leq x+2\sqrt{xy}+y,$$

car $2\sqrt{xy} \geq 0$, ce qui est équivalent à

$$x+y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(c) $\forall x, y \geq 0$ on a

$$x = (x-y) + y \text{ et } (x-y) + y \leq |x-y| + y$$

d'où $\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{y}$, donc en utilisant (b), on a

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} \quad (1.3)$$

de la même façon, on a $\sqrt{y} \leq \sqrt{|y-x|} + \sqrt{x}$ et en utilisant (b), on a

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq -\sqrt{|x-y|} \quad (1.4)$$

de (1.3) et (1.4) on a donc

$$-\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|} \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

2. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

(a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq x \leq y < [y] + 1 \Rightarrow [x] \leq y < [y] + 1$

or $[y]$ est le plus grand entier inférieur à y , et comme $[x]$ est un entier alors $[x] \leq [y]$.

(b)

$$\left. \begin{array}{l} [x] \leq x < [x] + 1 \\ [y] \leq y < [y] + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow [x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$$

or $[x+y]$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, alors

$$[x] + [y] \leq [x+y]. \quad (1.5)$$

D'une autre part, on a $[x+y] + 1$ est le plus petit entier supérieur à $x+y$, donc

$$[x+y] + 1 \leq [x] + [y] + 2 \Leftrightarrow [x+y] \leq [x] + [y] + 1 \quad (1.6)$$

de (1.5) et (1.6) on a

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1.$$



Algèbre

Enseignant : ABDELKADER.C

Interrogation N1 Algèbre 1 cycle ingénieur

Exercice 1 :

1. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(b) $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

(c) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}; \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

2. Soit $[x]$ la partie entière de x ; montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y],$

(b) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$