

Corrigé Détaillé : Examen de rattrapage d’algèbre 01
Avril 2026

Exercice 1 : (08 pts)

I. Relation d’équivalence sur \mathbb{Z} (5 pts)

On définit sur \mathbb{Z} la relation \mathcal{R} par : $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 4k$.

1. Montrons que \mathcal{R} est une relation d’équivalence (2 pts)

Il faut prouver que \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

– **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $x - x = 0$. Or, $0 = 4 \times 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$. Donc $x\mathcal{R}x$. (0.5 pt)

– **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 4k$. En multipliant par -1 , on obtient $y - x = 4(-k)$. Posons $k' = -k$. Puisque $k \in \mathbb{Z}$, on a $k' \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $y - x = 4k'$, ce qui signifie que $y\mathcal{R}x$. (0.5 pt)

– **Transitivité** : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = 4k$ et $y - z = 4k'$. En additionnant ces deux égalités membre à membre, on a : $(x - y) + (y - z) = 4k + 4k' \implies x - z = 4(k + k')$. En posant $k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$, on a $x - z = 4k''$, donc $x\mathcal{R}z$. (1 pt)

Conclusion : \mathcal{R} est bien une relation d’équivalence.

2. Classes d’équivalence de 0, 1, 2 et 3 (2 pts) La classe d’équivalence d’un élément a , notée \bar{a} ou \bar{a} , est l’ensemble $\{x \in \mathbb{Z} \mid x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = a + 4k, k \in \mathbb{Z}\}$.

– $\bar{0} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$ (0.5 pt)

– $\bar{1} = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$ (0.5 pt)

– $\bar{2} = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$ (0.5 pt)

– $\bar{3} = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$ (0.5 pt)

3. Ensemble quotient \mathbb{Z}/\mathcal{R} (1 pts) L’ensemble quotient est l’ensemble de toutes les classes d’équivalence distinctes formées par \mathcal{R} . Puisque la division euclidienne de tout entier par 4 donne un reste appartenant à $\{0, 1, 2, 3\}$, il n’existe que ces 4 classes.

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \quad (\text{Cet ensemble est souvent noté } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

(1 pt)

II. Relation d’ordre sur \mathbb{R} (3 pts)

On définit sur \mathbb{R} la relation \mathcal{S} par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{S}y \iff (x - y) \in \mathbb{N}$.

1. Montrons que \mathcal{S} est une relation d’ordre (2 pts)

- **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{R}$. $x - x = 0$. Comme $0 \in \mathbb{N}$, on a bien $x\mathcal{S}x$. (0.5 pt)
- **Antisymétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$. Cela signifie que $(x - y) \in \mathbb{N}$ et $(y - x) \in \mathbb{N}$. Posons $n = x - y \geq 0$ et $m = y - x \geq 0$. On a $n = -m$. Or, les seuls entiers naturels qui sont opposés l'un de l'autre sont nuls. Donc $n = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y$. (0.5 pt)
- **Transitivité** : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$. Alors $(x - y) \in \mathbb{N}$ et $(y - z) \in \mathbb{N}$. La somme de deux entiers naturels est un entier naturel. Donc $(x - y) + (y - z) \in \mathbb{N}$, ce qui donne $(x - z) \in \mathbb{N}$. Ainsi, $x\mathcal{S}z$. (1 pt)

\mathcal{S} est donc une relation d'ordre.

2. Cet ordre est-il total ? (1 pts) Non, l'ordre n'est pas total, il est partiel. (0.25 pt)
Justification : Deux éléments sont comparables si $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$. Prenons $x = 0.5$ et $y = 0.2$.
 $x - y = 0.3 \notin \mathbb{N}$ (donc on n'a pas $x\mathcal{S}y$). $y - x = -0.3 \notin \mathbb{N}$ (donc on n'a pas $y\mathcal{S}x$). Ces deux éléments ne peuvent pas être comparés par \mathcal{S} , l'ordre n'est donc pas total. (0.75 pt)

Exercice 2 : (07 pts)

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

1. Calcul d'images et d'antécédents (2 pts)

- **Calcul de $f(\{-1, 3\})$** : $f(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) - 6 = 2 + 4 - 6 = 0$. $f(3) = 2(3)^2 - 4(3) - 6 = 18 - 12 - 6 = 0$. Donc, $f(\{-1, 3\}) = \{0\}$. (1 pt)

- **Calcul de $f^{-1}(\{-10\})$** : On cherche les réels x tels que $f(x) = -10$.

$$2x^2 - 4x - 6 = -10 \iff 2x^2 - 4x + 4 = 0 \iff x^2 - 2x + 2 = 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle. Donc, -10 n'a aucun antécédent. Ainsi, $f^{-1}(\{-10\}) = \emptyset$. (1 pt)

2. Injectivité, surjectivité et bijectivité (2 pts)

- **Injectivité** : D'après la question précédente, $f(-1) = f(3) = 0$ alors que $-1 \neq 3$. L'application f n'est pas injective. (0.75 pt)

- **Surjectivité** : Nous avons vu que l'élément $-10 \in \mathbb{R}$ ne possède aucun antécédent par f . L'application f n'est pas surjective. (0.75 pt)

- **Bijectivité** : N'étant ni injective ni surjective, f n'est pas bijective. (0.5 pt)

3. Restriction de f pour obtenir une bijection (3 pts)

Mettons $f(x)$ sous sa forme canonique : $f(x) = 2(x^2 - 2x) - 6 = 2[(x - 1)^2 - 1] - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 = 2(x - 1)^2 - 8$. La courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(1, -8)$. Pour rendre f injective, on doit se restreindre à un intervalle où elle est strictement monotone. Prenons l'intervalle $I = [1, +\infty[$. (On aurait pu aussi choisir $] - \infty, 1]$. (0.5 pt)
 Sur I , f est strictement croissante. Son image est alors $f(I) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-8, +\infty[$.

On pose donc $J = [-8, +\infty[$.

(0.5 pt)

Vérifions que $f : I \rightarrow J$ est bijective en trouvant son application réciproque f^{-1} . Soit $y \in J$. Cherchons l'unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

$$2(x-1)^2 - 8 = y \iff 2(x-1)^2 = y+8 \iff (x-1)^2 = \frac{y+8}{2}$$

(1 pt) Puisque $x \in [1, +\infty[$, on a $x-1 \geq 0$, donc la racine donne :

$$x-1 = \sqrt{\frac{y+8}{2}} \implies x = 1 + \sqrt{\frac{y+8}{2}}$$

Il existe une unique solution $x \in I$ pour chaque $y \in J$. La restriction est bien bijective. (0.5 pt)

Son application réciproque est $f^{-1} : [-8, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ définie par :

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x+8}{2}}$$

(0.5 pt)

Exercice 3 : (05 pts)

1. Montrons que 1 est solution de (E)

(1 pts)

Remplaçons z par 1 dans (E) :

$$1^3 - (1+i)(1)^2 + (1+i)(1) - 1 = 1 - 1 - i + 1 + i - 1 = 0$$

L'égalité est vérifiée, donc 1 est bien solution de l'équation (E).

(1 pt)

2. Factorisation de (E)

(2 pts)

Puisque $z_0 = 1$ est racine, on peut factoriser par $(z-1)$. On cherche $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - 1 = (z-1)(az^2 + bz + c)$. On peut utiliser l'identification ou bien on regroupe les termes astucieusement :

$$z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - 1 = (z^3 - 1) - (1+i)z^2 + (1+i)z$$

En utilisant l'identité remarquable $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ donc :

$$(z^3 - 1) - (1+i)z^2 + (1+i)z = (z-1)(z^2 + z + 1) - (1+i)z(z-1)$$

(1 pt)

On factorise par $(z-1)$:

$$z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - 1 = (z-1)[z^2 + z + 1 - (1+i)z] = (z-1)[z^2 + (1-1-i)z + 1] = (z-1)(z^2 - iz + 1)$$

L'équation (E) s'écrit donc sous la forme $(z-1)(z^2 - iz + 1) = 0$, avec $a = 1, b = -i, c = 1$. (1 pt)

3. Résolution de l'équation (E)

(2 pts)

L'équation équivaut à $z = 1$ ou $z^2 - iz + 1 = 0$. Résolvons $z^2 - iz + 1 = 0$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-i)^2 - 4(1)(1) = -1 - 4 = -5$$

(1 pt)

Comme $-5 = 5i^2 = (i\sqrt{5})^2$, les racines carrées de Δ sont $\delta = \pm i\sqrt{5}$.

Les deux autres solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-(-i) - i\sqrt{5}}{2} = \frac{i(1 - \sqrt{5})}{2}$$

$$z_2 = \frac{-(-i) + i\sqrt{5}}{2} = \frac{i(1 + \sqrt{5})}{2}$$

(0.5 pt) L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans \mathbb{C} est :

$$S = \left\{ 1, i \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), i \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

(0.5 pt)