

Corrigé Détaillé : Examen de rattrapage d’algèbre 01
Avril 2026

Exercice 1 : (06 pts)

I. Étude de la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R}

On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathcal{R} par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$. Remarquons que $xe^y = ye^x \iff xe^{-x} = ye^{-y}$. Posons la fonction $h(x) = xe^{-x}$. La relation devient : $x\mathcal{R}y \iff h(x) = h(y)$.

1. Montrons que \mathcal{R} est une relation d’équivalence (2 pts) Il faut montrer que \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a trivialement $h(x) = h(x)$, donc $xe^{-x} = xe^{-x} \iff xe^x = xe^x$. Ainsi, $x\mathcal{R}x$. (0.5 pt)
- **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$. Alors $h(x) = h(y) \implies h(y) = h(x) \implies y\mathcal{R}x$. (0.5 pt)
- **Transitivité** : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $h(x) = h(y)$ et $h(y) = h(z)$. Par transitivité de l’égalité, $h(x) = h(z)$, ce qui implique $x\mathcal{R}z$. (1 pt)

Conclusion : \mathcal{R} est une relation d’équivalence.

2. Classe d’équivalence de 1 (2 pts) La classe d’équivalence de 1, notée $\dot{1}$, est l’ensemble des réels en relation avec 1 :

$$\dot{1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{R}1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid xe^{-x} = 1 \cdot e^{-1}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = e^{-1}\} \quad (0.5 \text{ pt})$$

Étudions la fonction $h(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} . h est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $h'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$. (0.5 pt)

$h'(x) = 0 \iff x = 1$. De plus, $h'(x) > 0$ sur $] -\infty, 1[$ et $h'(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$. La fonction h admet donc un maximum global strict en $x = 1$, qui vaut $h(1) = e^{-1}$. (0.5 pt)

L’équation $h(x) = e^{-1}$ admet donc une unique solution dans \mathbb{R} , qui est $x = 1$. Ainsi, $\dot{1} = \{1\}$. (0.5 pt)

II. Étude de la relation \mathcal{S} sur \mathbb{R}^2

$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{S}(x', y') \iff (x \leq x') \text{ et } (y \leq y')$.

1. Montrons que \mathcal{S} est une relation d’ordre (1.5 pts)

- **Réflexivité** : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $x \leq x$ et $y \leq y$, on a $(x, y)\mathcal{S}(x, y)$. (0.5 pt)

– **Antisymétrie** : Soient (x, y) et (x', y') tels que $(x, y)\mathcal{S}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{S}(x, y)$. On a $(x \leq x' \text{ et } y \leq y')$ ET $(x' \leq x \text{ et } y' \leq y)$. Par antisymétrie de l'ordre \leq sur \mathbb{R} , on déduit $x = x'$ et $y = y'$, donc $(x, y) = (x', y')$. **(0.5 pt)**

– **Transitivité** : Soient $(x, y)\mathcal{S}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{S}(x'', y'')$. On a $x \leq x' \leq x'' \implies x \leq x''$. De même $y \leq y' \leq y'' \implies y \leq y''$. Donc $(x, y)\mathcal{S}(x'', y'')$. **(0.5 pt)**

2. Cet ordre est-il total ? (0.5 pts) Non, l'ordre n'est pas total, il est partiel. **(0.25 pt)**

Justification par contre-exemple : Prenons les couples $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On n'a pas $(1, 0)\mathcal{S}(0, 1)$ car $1 \not\leq 0$. On n'a pas non plus $(0, 1)\mathcal{S}(1, 0)$ car $1 \not\leq 0$. Ces deux éléments sont incomparables. **(0.25 pt)**

Exercice 2 : (06 pts)

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 - \frac{4}{1+|x|}$.

1. Calcul d'images et d'antécédents **(1 pts)**

– L'image de l'ensemble $\{1, -1\}$: $f(1) = 2 - \frac{4}{1+|1|} = 2 - \frac{4}{2} = 0$. Et $f(-1) = 2 - \frac{4}{1+|-1|} = 2 - \frac{4}{2} = 0$. Donc $f(\{1, -1\}) = \{0\}$. **(0.5 pt)**

– Antécédents de -2 : On résout $f(x) = -2$.

$$2 - \frac{4}{1+|x|} = -2 \iff \frac{4}{1+|x|} = 4 \iff 1+|x| = 1 \iff |x| = 0 \iff x = 0$$

Donc $f^{-1}(\{-2\}) = \{0\}$. **(0.5 pt)**

2. Injectivité, surjectivité et bijectivité **(1.5 pts)**

– **Injectivité** : D'après la question précédente, $f(1) = f(-1) = 0$ alors que $1 \neq -1$. Deux éléments distincts ont la même image, f n'est **pas injective**. **(0.5 pt)**

– **Surjectivité** : Prenons $y = 2 \in \mathbb{R}$. Résolvons $f(x) = 2 \iff 2 - \frac{4}{1+|x|} = 2 \iff \frac{4}{1+|x|} = 0$. Cette équation n'a aucune solution. 2 n'a pas d'antécédent, f n'est **pas surjective**. **(0.5 pt)**

– **Bijectivité** : f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est **pas bijective**. **(0.5 pt)**

3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq f(x) < 2$ **(1.5 pts)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue donne $|x| \geq 0$.

$$|x| \geq 0 \implies 1 + |x| \geq 1 > 0 \implies 0 < \frac{1}{1+|x|} \leq 1$$

(0.5 pt) On multiplie par 4 :

$$0 < \frac{4}{1+|x|} \leq 4$$

(0.5 pt) On multiplie par -1 (l'ordre change) :

$$-4 \leq -\frac{4}{1+|x|} < 0$$

(0.5 pt) On ajoute 2 :

$$2 - 4 \leq 2 - \frac{4}{1 + |x|} < 2 + 0 \implies -2 \leq f(x) < 2$$

La propriété est démontrée.

4. Bijectivité de la restriction g (2 pts) Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-2, 2[$ telle que $g(x) = 2 - \frac{4}{1+x}$ (car pour $x \in \mathbb{R}^+$, $|x| = x$). Soit $y \in [-2, 2[$. Cherchons s'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(x) = y$.

$$2 - \frac{4}{1+x} = y \iff \frac{4}{1+x} = 2 - y$$

Puisque $y < 2$, on a $2 - y > 0$. On peut donc inverser :

$$\frac{1+x}{4} = \frac{1}{2-y} \iff 1+x = \frac{4}{2-y} \iff x = \frac{4}{2-y} - 1 = \frac{4 - (2-y)}{2-y} = \frac{y+2}{2-y}$$

(1 pt) Vérifions que ce x appartient bien à \mathbb{R}^+ : Comme $y \in [-2, 2[$, on a $y \geq -2 \implies y+2 \geq 0$, et $y < 2 \implies 2-y > 0$. Le rapport $\frac{y+2}{2-y}$ est donc positif ou nul, d'où $x \geq 0$. Pour tout $y \in [-2, 2[$, il existe un unique antécédent $x \in \mathbb{R}^+$. g est donc **bijective**. (0.5 pt)

Son application réciproque est $g^{-1} : [-2, 2[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g^{-1}(x) = \frac{x+2}{2-x}$. (0.5 pt)

Exercice 3 : (08 pts)

I. Équation du second degré dans \mathbb{C}

(3 pts)

Résolvons $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin \alpha)e^{i\alpha} = 0$. Calculons le discriminant réduit Δ' (ou $\Delta = 4\Delta'$) :

$$\Delta' = (-e^{i\alpha})^2 - 1 \cdot [2i(\sin \alpha)e^{i\alpha}] = e^{2i\alpha} - 2i \sin \alpha e^{i\alpha}$$

(1 pt) En utilisant la formule d'Euler pour le sinus, on a $2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$. Substituons cette expression dans Δ' :

$$\Delta' = e^{2i\alpha} - (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})e^{i\alpha} = e^{2i\alpha} - e^{2i\alpha} + e^0 = 1$$

(1 pt) Le discriminant réduit est 1, dont les racines carrées sont ± 1 . Les solutions sont donc $z = e^{i\alpha} \pm 1$. On obtient : $S = \{e^{i\alpha} - 1, e^{i\alpha} + 1\}$. (1 pt)

Note : On peut aussi écrire sous forme exponentielle : $z_1 = 2i \sin(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$ et $z_2 = 2 \cos(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$.

II. Équation de degré 3 dans \mathbb{C}

1. Solution imaginaire pure (1.5 pts) Soit $z_0 = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Remplaçons z_0 dans (E) :

$$\begin{aligned} 2(iy)^3 - (1-i)(iy)^2 + (1+i)(iy) + 2i &= 0 \\ -2iy^3 - (1-i)(-y^2) + iy - y + 2i &= 0 \\ -2iy^3 + y^2 - iy^2 + iy - y + 2i &= 0 \end{aligned}$$

(0.5 pt) En séparant parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} y^2 - y = 0 & \text{(Partie réelle)} \\ -2y^3 - y^2 + y + 2 = 0 & \text{(Partie imaginaire)} \end{cases}$$

(0.5 pt) La première équation donne $y(y - 1) = 0 \implies y = 0$ ou $y = 1$. Vérifions dans la partie imaginaire : Si $y = 0$, $0 - 0 + 0 + 2 = 2 \neq 0$ (impossible). Si $y = 1$, $-2(1)^3 - 1^2 + 1 + 2 = -2 - 1 + 1 + 2 = 0$. (C'est la bonne solution). Donc (E) admet une unique racine imaginaire pure : $z_0 = i$. **(0.5 pt)**

2. Racines carrées de $8 - 6i$ **(1.5 pts)** Soit $w = u + iv$ une racine carrée de $8 - 6i$. On a $w^2 = 8 - 6i \iff (u^2 - v^2) + 2iuv = 8 - 6i$. De plus, le module donne $|w|^2 = |8 - 6i| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \implies u^2 + v^2 = 10$. On obtient le système :

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 8 \\ u^2 + v^2 = 10 \\ 2uv = -6 \implies uv < 0 \text{ (u et v de signes opposés)} \end{cases}$$

(1 pt) En additionnant les deux premières équations : $2u^2 = 18 \implies u^2 = 9 \implies u = \pm 3$. En les soustrayant : $2v^2 = 2 \implies v^2 = 1 \implies v = \pm 1$. Puisque $uv < 0$, les racines carrées de $8 - 6i$ sont : $\delta_1 = 3 - i$ et $\delta_2 = -3 + i$. **(0.5 pt)**

3. Résolution de (E) **(2 pts)** Puisque $z_0 = i$ est racine, on peut factoriser (E) par $(z - i)$. $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = (z - i)(az^2 + bz + c)$. En développant et en identifiant les coefficients, on obtient facilement $a = 2$, $c = -2$ et $b = -1 + 3i$. L'équation (E) devient : $(z - i)(2z^2 + (-1 + 3i)z - 2) = 0$. **(1 pt)** Résolvons l'équation du second degré $2z^2 + (-1 + 3i)z - 2 = 0$. Son discriminant est :

$$\Delta = (-1 + 3i)^2 - 4(2)(-2) = (1 - 9 - 6i) + 16 = 8 - 6i$$

Heureusement, nous connaissons les racines de Δ d'après la question 2 : $\delta = 3 - i$. **(0.5 pt)** Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-(-1 + 3i) + (3 - i)}{2 \times 2} = \frac{1 - 3i + 3 - i}{4} = \frac{4 - 4i}{4} = 1 - i$$
$$z_2 = \frac{-(-1 + 3i) - (3 - i)}{4} = \frac{1 - 3i - 3 + i}{4} = \frac{-2 - 2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

(0.5 pt) L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$S = \left\{ i, 1 - i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$