Série de TD n°2 (à traiter en 03 séances de TD)

Champ électrique créé par des distributions discrètes de charges

Exercice 1 :

Cinq charges ponctuelles identiques $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q > 0$ sont placées régulièrement sur l'axe (Ox) aux points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 d'abscisses $x_1 = -2a, x_2 = -a, x_3 = 0, x_4 = +a, x_5 = +2a$, respectivement, comme illustré sur la Figure 1.

1. Calculer le champ électrique total au point P_1 d'abscisse $x = +3a$.
2. Par des considération de symétrie, calculer le champ total au point P_2 de coordonnées $(0, y)$ avec $y = +4a$.

Exercice 2 :

Soit la distribution de charges de la Figure 2, constituée de trois charges ponctuelles $q_1 = q_2 = q > 0$ et $q_3 = -q$ situées, respectivement, aux point $A(0, a), B(0, -b)$ et $O(0,0)$. Tous les résultats doivent s'exprimer en fonction de K,q,a et b

1. Déterminer l'expressions du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution au point M de l'axe (OX), tel que $OM = x > 0$.
2. On fixe au point M une charge ponctuelle $q_M = Q$. Déduire la force électrostatique $\vec{F}(M)$ qu'elle va subir.

Exercice 3 :

Trois charges ponctuelles identiques $q_1 = q_2 = q_3 = q > 0$ sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté a. Ce triangle est contenu dans le plan (OXY). Les coordonnées des sommets sont : $A(0,0), B(a, 0), C(a/2\,, a\sqrt{3}/2)$.

1. Faites un schéma de cette distribution et trouver les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle.
2. Calculer le champ électrique total au point G.
3. On place une quatrième charge $q_0 > 0$ au point G. Quelle force électrostatique subit-elle ?

Exercice 4 :

On donne quatre charges ponctuelles $q_1 = q_2 = Q, q_3 = q_4 = -2Q$ situées aux sommets d'un carré $ABCD$ de côté L, comme sur la Figure 3. Déterminez le champ électrique résultant (a) au point H, centre du carré (b) au point F, milieu du coté BD.

Exercice 5 :

Trois charges ponctuelles $q_1 = q, q_2 = 2q$ et $q_3 = -2q$ $(q > 0)$, sont placées aux trois sommets ABC d'un rectangle $ABCD$ de cotés d et $2d$, comme le montre la Figure 4.

1. Calculer le champ électrique résultant au point D;
2. Déduire la force appliquée sur une charge $q_4 = -q$ placée en D.

Exercice 6 :

Un corps de masse m et de charge électrique positive q est placé sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. On suppose l'existence de frottements statique et cinétique de coefficients μ_s et μ_c, respectivement. On applique un champ électrique $\vec{E}$, dont la direction est indiquée sur la Figure 5. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. Déterminer l'expression de l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ qu'il faut appliquer pour maintenir le corps en équilibre sur le plan incliné.
2. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ nécessaire pour que le corps se déplace le long du plan incliné avec une accélération constante a dirigée vers le haut du plan.

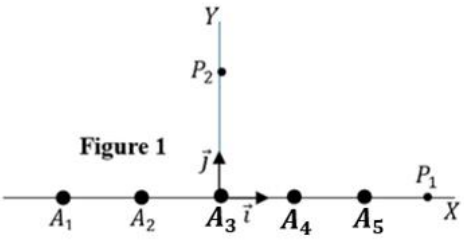


Figure 1

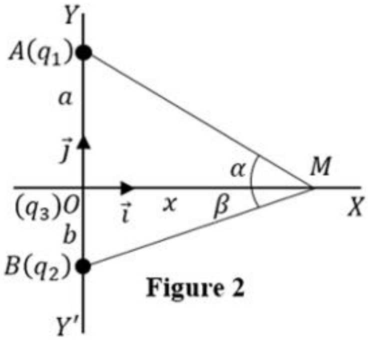


Figure 2

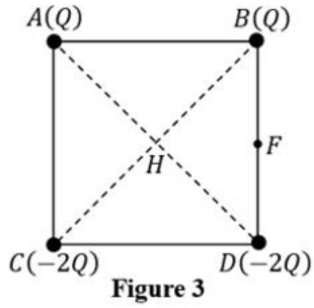


Figure 3

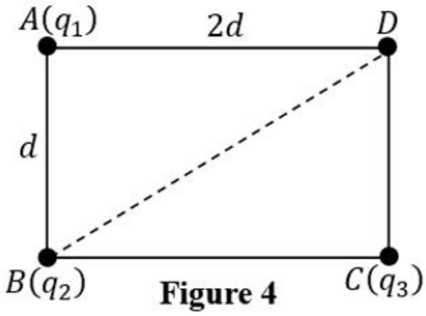


Figure 4

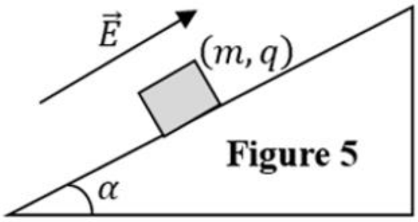
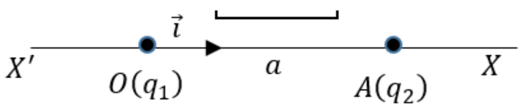


Figure 5

<u>**Exercices supplémentaires :**</u>

Exercice S1 :

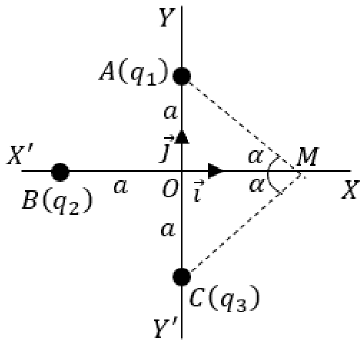
Sur l'axe $(X'OX)$, d'origine O, sont placées une charge ponctuelle positive $q_1 = +3q$ en O, et une charge ponctuelle négative $q_2 = -q$ en A d'abscisse $x = a$, tel que $a > 0$ (voir Figure ci-dessous).



Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ aux divers points M de l'axe $(X'OX)$, tel que $OM = x$. Distinguer les régions : $x < 0, 0 < x < a, x > a$

Exercice S2 :

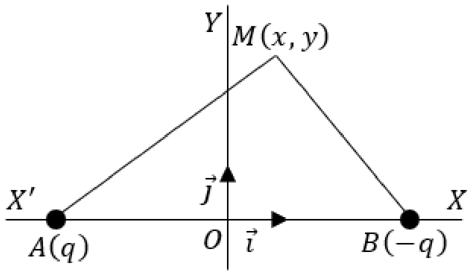
Soit la distribution de charges de figure ci- contre, où : $q_1 = q, q_2 = -2q, q_3 = q\ (q > 0), OA = OB = OC = a$



1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par les charges au point M, situé sur l'axe (Ox) et repéré par $OM = x > 0$.
2. Une charge $q_4 = 2q$ est placée en M. En déduire la force électrostatique $\vec{F}(M)$ à laquelle elle est soumise.

Exercice S3 :

Deux charges ponctuelles $q_1 = q$ et $q_2 = -q$ (avec $q > 0$) sont placées sur l'axe (OX) aux positions respectives, $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ (voir Figure ci-contre).

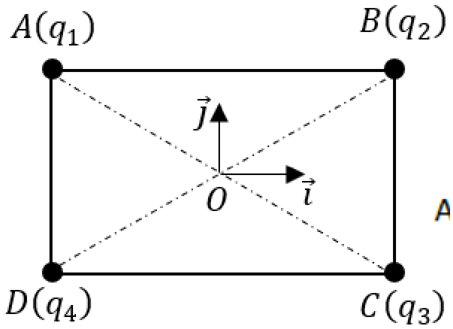


1. Déterminer, en fonction de K, q, a, x et y, le potentiel électrique $V(M)$ au point $M(x, y)$.
2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ à partir du potentiel obtenu.
3. Que deviennent les expressions de $V(M)$ et $\vec{E}(M)$ dans les cas suivants : $i)$ $x = 0$ et $ii)$ $y = 0$?

Exercice S4 :

Quatre charges ponctuelles q_1 (négative), $q_2 = -2q_1, q_3 = -3q_1$ et $q_4 = +2q_1$ sont placées sur les quatre sommets d'un rectangles de longueur a et de largeur b (voir figure ci-dessous).

Calculer le champ électrique créé par cette distribution de charges au centre O du rectangle.



Corrigé de la série de TD n°1

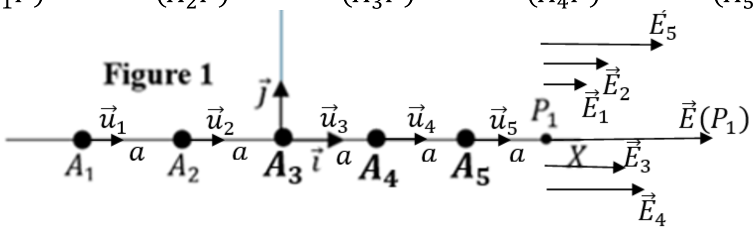
Exercice 1 :

1. Le champ électrique total au point P_1 d'abscisse $x = +3a$:

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(P_1) = \vec{E}_1(P_1) + \vec{E}_2(P_1) + \vec{E}_3(P_1) + \vec{E}_4(P_1) + \vec{E}_5(P_1)$$

$$= K\frac{q_1}{(A_1P)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(A_2P)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(A_3P)^2}\vec{u}_3 + K\frac{q_4}{(A_4P)^2}\vec{u}_4 + K\frac{q_5}{(A_5P)^2}\vec{u}_5$$



D'après le schéma :

$$A_1P = 5a, A_2P = 4a, A_2P = 3a, A_2P = 2a, A_2P = a$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_3 = \vec{u}_4 = \vec{u}_5 = \vec{\imath}$$

Par conséquent ;

$$\vec{E}(P_1) = Kq\left(\frac{1}{25a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2}\right)\vec{\imath} = Kq\left(\frac{5269}{3600a^2}\right)\vec{\imath} = 1.46\frac{kq}{a^2}\vec{\imath}$$

2. Le champ total au point P_2 de coordonnées $(0, y)$ avec $y = +4a$:

Dans notre cas, l'axe (OY) est un axe de symétrie. On montre alors que le champ total est porté par cet axe (vous pouvez faire la démonstration en prenant deux charges symétrique).

Par conséquent, il suffit de considérer la composante de chaque champ suivant cet axe :

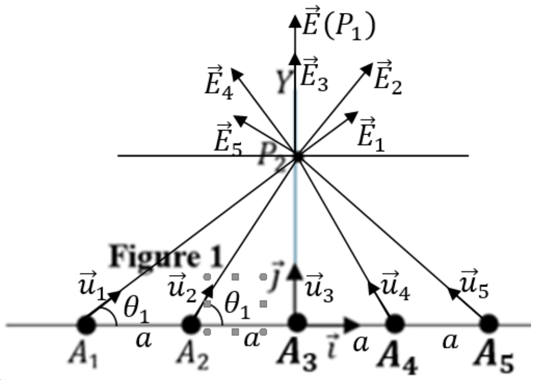
$$\vec{E}(P_2) = \left(E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} + E_{5y}\right)\vec{\jmath}$$

Cependant $E_{1y} = E_{5y}$ et $E_{2y} = E_{4y}$. Par conséquent :

$$\vec{E}(P_2) = \left(2E_{1y} + 2E_{2y} + E_{3y}\right)\vec{\jmath}$$

Introduisant les angles θ_1 et θ_2 :

$$\vec{E}(P_2) = \left(2E_1\cos\theta_1 + 2E_2\cos\theta_2 + E_{3y}\right)\vec{\jmath}$$
$$= Kq\left(\frac{2\cos\theta_1}{(A_1P_2)^2} + \frac{2\cos\theta_2}{(A_2P_2)^2} + \frac{1}{(A_3P_2)^2}\right)\vec{\jmath}$$



D'après la figure :

$$(A_1P_2)^2 = 20a^2\ ;\ (A_2P_2)^2 = 17a^2\ ;\ (A_3P_2)^2 = 16a^2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \,;\, \cos\theta_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

On trouve finalement :

$$\vec{E}(P_2) = K\frac{q}{a^2}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{8}{17\sqrt{17}} + \frac{1}{16}\right)\vec{\jmath} = 0.26K\frac{q}{a^2}$$

Exercice 2 :

1. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créés par les charges au point M :
D'après le principe de superposition :

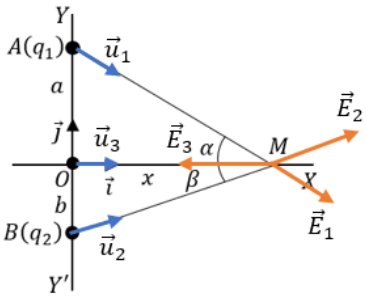
$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \vec{E}_3(M) = K\frac{q_1}{AM^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{BM^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{OM^2}\vec{u}_3$$

$$AM = \sqrt{x^2 + a^2} \,;\, BM = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$\vec{u}_1 = \cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{\jmath} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\vec{\imath} - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_2 = \cos\beta\,\vec{\imath} + \sin\beta\,\vec{\jmath} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}\vec{\imath} + \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{\imath}$$



$$\vec{E}(M) = Kq\left\{\left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{x}{(x^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + b^2)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}\right\}$$

2. L'expressions de $\vec{E}(M)$ dans le cas où $\alpha = \beta$:

$$\alpha = \beta \rightarrow a = b$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left(\frac{2x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}\right)\vec{\imath}$$

Exercice 3 :

1. Le schéma de cette distribution et les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{a}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ce point représente aussi l'intersection des médiatrices des trois cotés du triangle.

2. Le champ électrique total au point G :

Pour calculer le champ électrique, nous devons d'abord trouver la distance de chaque charge au point G :

$$AB = BG = CG = d = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(G) = \vec{E}_1(G) + \vec{E}_2(G) + \vec{E}_3(G) = E_1\vec{u}_1 + E_2\vec{u}_2 + E_3\vec{u}_3$$

Chaque charge crée au point G un champ de module :

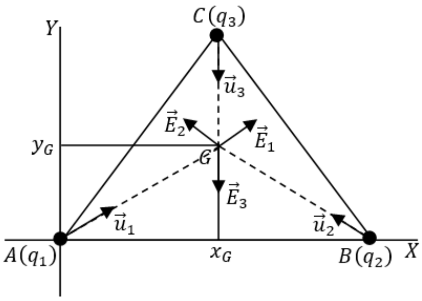
$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{Kq}{d^2} = 3\frac{Kq}{a^2}$$

Les composante des vecteurs unitaires :

$$\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{BG}}{BG} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\overrightarrow{CG}}{CG} = -\vec{\jmath}$$



Le champ totale est :

$$\vec{E}(G) = \vec{0}$$

C'est un résultat attendu par symétrie : les trois charges identiques placées aux sommets d'un triangle équilatéral créent des champs qui se compensent exactement au centre.

3. On place une quatrième charge $q_0 > 0$ au point G. la force électrostatique subit par la charge :

$$\vec{F}(G) = q_0\vec{E}(G) = \vec{0}$$

Exercice 4 :

a. Le champ électrique résultant au point H, centre du carré :

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(H) = \vec{E}_1(H) + \vec{E}_2(H) + \vec{E}_3(H) + \vec{E}_4(H)$$
$$= K\frac{q_1}{(AH)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(BH)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(CH)^2}\vec{u}_3 + K\frac{q_4}{(DH)^2}\vec{u}_4$$

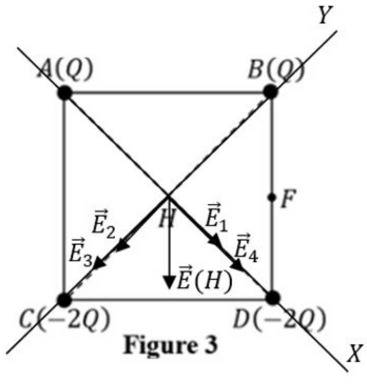


Figure 3

D'après la figure :

$$AH = BH = CH = DH = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Pour trouver les composantes des vecteurs unitaires, on choisit in système de coordonnées orthonormé dont l'origine coïncide avec le point F et les axes sont confondus avec les deux diagonales du carré :

$$\vec{u}_1 = \vec{\imath}, \vec{u}_2 = -\vec{\jmath}, \vec{u}_3 = \vec{\jmath}\ ;\ \vec{u}_4 = -\vec{\imath}$$

Le champ total est :

$$\vec{E}(H) = 6K\frac{Q}{L^2}\vec{\imath} - 6K\frac{Q}{L^2}\vec{\jmath} = 6K\frac{Q}{L^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

b. Le champ électrique au point F, milieu du coté BD :
D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(F) = \vec{E}_1(F) + \vec{E}_2(F) + \vec{E}_3(F) + \vec{E}_4(F) = K\frac{q_1}{(AF)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(BF)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(CF)^2}\vec{u}_3 + K\frac{q_4}{(DF)^2}\vec{u}_4$$

D'après la figure :

$$BF = DF = \frac{BD}{2} = \frac{L}{2}\ ; AF = CF = \sqrt{(AB)^2 + (BF)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Pour trouver les composantes des vecteurs unitaires, on choisit in système de coordonnées orthonormé dont l'origine coïncide avec le point F et les axes sont confondus avec le segment BD et l'axe perpendiculaire :

$$\vec{u}_1 = \cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{\jmath}, \vec{u}_2 = -\vec{\jmath}, \vec{u}_3 = \vec{\jmath}\ ;\ \vec{u}_4 = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$$

Le champ total est :

$$\vec{E}(F) = \frac{KQ}{L^2}\left\{-\left(\frac{36}{5}\cos\alpha\right)\vec{\imath} - \left(\frac{44\sin\alpha + 28}{5}\right)\vec{\jmath}\right\}$$

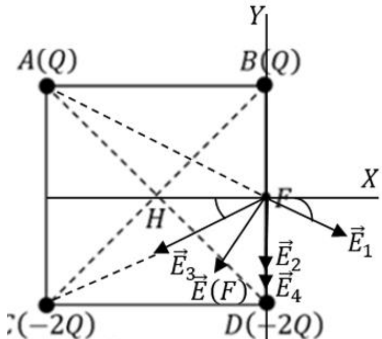


Figure 3

D'après la figure, on a :

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\ ; \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Finalement, on a :

$$\vec{E}(F) = \frac{KQ}{L^2}\left\{-\left(\frac{72}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{44 + 28\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}\right\} = \frac{KQ}{L^2}\{-6.44\vec{\imath} - 9.53\vec{\jmath}\}$$

<u>Exercice 5 :</u>

Trois charges ponctuelles $q_1 = q, q_2 = 2q$ et $q_3 = -2q$ $(q > 0)$, sont placées aux trois sommets ABC d'un rectangle $ABCD$ de cotés d et $2d$, comme le montre la Figure 4.

1. Le champ électrique résultant au point D :

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(D) = \vec{E}_1(D) + \vec{E}_2(D) + \vec{E}_3(D) = K\frac{q_1}{(AD)^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{(BD)^2}\vec{u}_2 + K\frac{q_3}{(CD)^2}\vec{u}_3$$

D'après la figure :

$$AD = 2d\,;BD = \sqrt{5}d\,;CD = d$$

Pour trouver les composantes des vecteurs unitaires, on choisit in système de coordonnées orthonormé dont l'origine coïncide avec le point D et les axes sont confondus avec les deux côtés du rectangle :

$$\vec{u}_1 = \vec{\imath}, \vec{u}_2 = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}, \vec{u}_3 = \vec{\jmath}$$

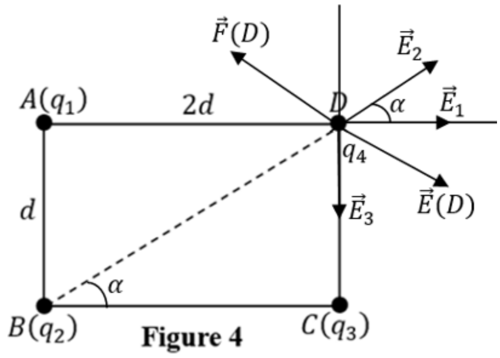


Figure 4

Le champ total est :

$$\vec{E}(D) = K\frac{q}{4d^2}\vec{\imath} + K\frac{2q}{5d^2}(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}) - K\frac{2q}{d^2}\vec{\jmath} = \frac{Kq}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cos\alpha\right)\vec{\imath} + \left(\frac{2}{5}\sin\alpha - 2\right)\vec{\jmath}\right]$$

D'après la figure :

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,;\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On trouve finalement :

$$\vec{E}(D) = \frac{Kq}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{2}{5\sqrt{5}} - 2\right)\vec{\jmath}\right] = \frac{Kq}{d^2}(0.60\vec{\imath} - 1.82\vec{\jmath})$$

2. Déduire la force appliquée sur une charge $q_4 = -q$ placée en D :

$$\vec{F}(D) = q_4\vec{E}(D) = -\frac{Kq^2}{d^2}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{2}{5\sqrt{5}} - 2\right)\vec{\jmath}\right] = -\frac{Kq^2}{d^2}(0.60\vec{\imath} - 1.82\vec{\jmath})$$

<u>Exercice 6 :</u>

Un corps ponctuel de masse m et de charge électrique positive q est placé sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. On suppose l'existence de frottements statique et cinétique de coefficients μ_s et μ_c, respectivement. On applique un champ électrique $\vec{E}$, dont la direction est indiquée sur la Figure 5. On note g l'accélération de la pesanteur.

1. L'expression de l'intensité du champ électrique $\vec{E}$ qu'il faut appliquer pour maintenir le corps en équilibre sur le plan incliné :

$$PFD : \sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_s + \vec{F}_e = \vec{0}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX) : \ F_e - P_x - f_s = 0 \\ (OY) : R - P_y = 0 \end{cases}$$

Force de frottement statique :

$$f_s = \mu_s R = \mu_s P_y$$

Par conséquent :

$$F_e = P_x + f_s = mg\sin\alpha + \mu_s mg\cos\alpha$$

Or $F_e = qE$. Donc :

$$E = \frac{mg}{q}(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)$$

2. L'expression du champ électrique $\vec{E}$ nécessaire pour que le corps se déplace le long du plan incliné avec une accélération constante a dirigée vers le haut du plan :

$$PFD : \sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_c} + \vec{F_e} = m\vec{a}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX) : \; F_e - P_x - f_c = ma \\ (OY) : R - P_y = 0 \end{cases}$$

Force de frottement statique :

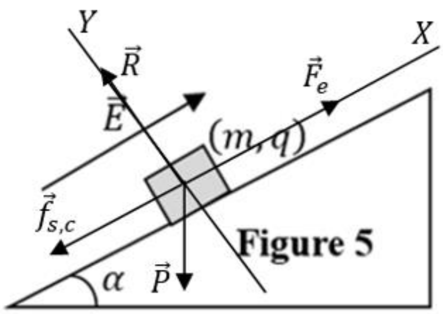
$$f_c = \mu_c R = \mu_c P_y$$

Par conséquent :

$$F_e = P_x + f_s + ma = mg\sin\alpha + \mu_c mg\cos\alpha + ma$$

Or $F_e = qE$. Donc :

$$E = \frac{mg}{q}(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha) + \frac{ma}{q}$$



Convention : les vecteurs unitaires sont toujours dirigés vers le point où on cherche à calculer le champ.