Série de TD n°4 (à traiter en 2 séance)

Dipôle électrostatique

Exercice :

Un dipôle électrostatique est un ensemble de deux charges électriques ponctuelles opposées $(+q)$ et $(-q)$, séparées par une distance a très petite par rapport à la distance r au point M où l'on observe leurs effets (approximation dipolaire) (Figure 1). On appelle moment dipolaire la quantité vectorielle :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{AB}$$

1. Déterminer l'expression du potentiel électrique $V(M)$ créé par un dipôle en un point M du plan (OXY), repéré par ses coordonnées polaires r et θ (voir figure 1) ;
2. En utilisant la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$, trouver les composantes polaires (E_r, E_θ) du champ électrique créé par un dipôle ;
3. Donner l'expression de l'énergie interne du dipôle ;
4. On place le dipôle dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$. Déterminer l'énergie potentielle électrique du dipôle et étudier son mouvement.

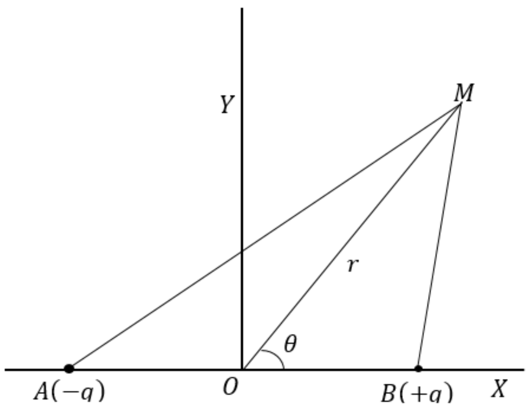


Figure 1

Exercices supplémentaires

Exercice S1 :

Soient deux plans infinis chargés uniformément en surface avec des densités respectives (-2σ) et $(-\sigma)$, avec $\sigma>0$.

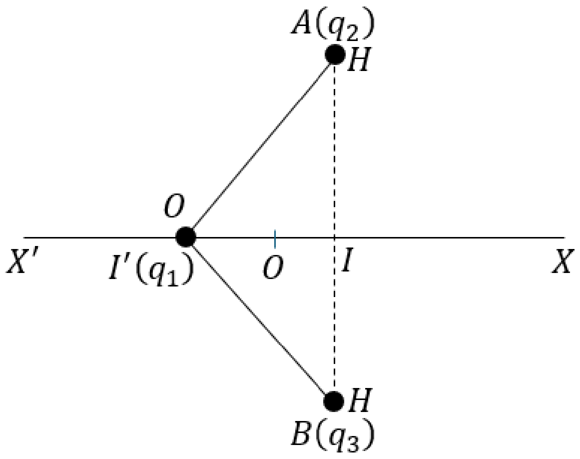
1. Déterminons le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.
2. On place un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ dans les trois régions successivement avec une orientation quelconque θ. Déterminer :
   a. L'énergie potentielle du dipôle dans les trois régions.
   b. Les positions d'équilibre stable et instable dans les trois régions.

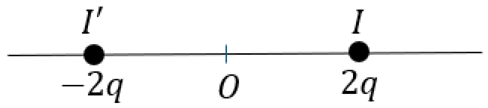
Exercice S2 :

On assimile une molécule d'eau H_2O à un système de 3 charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3 situées aux centres respectifs des atomes d'oxygène et d'hydrogène de la molécule H_2O. Comme l'indique la figure ci-dessous. Les charges q_1 et q_3 sont symétriques par rapport au point I de l'axe $(X'OX)$ $(IA = IB = b)$, on posa $OI = OI' = a$. Soit M un point de l'axe d'abscisse $OH = x > a$. Si $q_1 = -2q$ et $q_2 = q_3 = q$:

1. Déterminer le potentiel $V(x)$ en M en fonction de x, a et b.
2. Dans le cas où $b^2 \ll (x-a)^2$, donner l'expression approchée du potentiel. Soit $V_1(x, a)$ ce potentiel.

3. Montrer que $V_1(x, a)$ correspond au potentiel créé par un dipôle $(+2q, -2q)$ en un point de la droite portant les deux charges (voir Figure ci-dessous). Déduire le moment dipolaire de la molécule si $q = 0.52\ 10^{-19}C$ et $a = 0.3\ 10^{-10}m$.





Corrigé de la série de TD n°4

Exercice :

1. Potentiel crée par un dipôle électrostatique

Le point M où on veut calculer le potentiel est repéré par ses coordonnées polaires :

$$r = OM \quad et \quad \theta = (OX, OM) = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$$

D'après la définition du dipôle électrostatique $r \gg a = AB$. On suppose que O est le centre de AB. Par conséquent, le potentiel V crée en M par le dipôle est :

$$V = K\frac{-q}{AM} + K\frac{+q}{BM} = \frac{q}{K}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

Or

$$(BM)^2 = \left(\overrightarrow{BM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right)^2 = (OM)^2 + (OB)^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$$

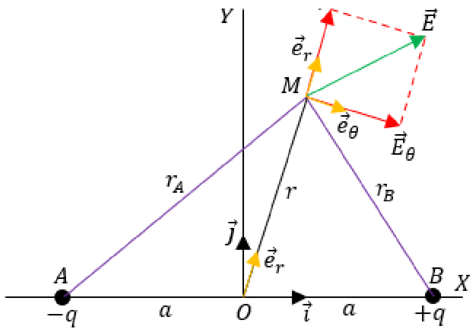
$$= (OM)^2 + (OB)^2 - 2(OM)(OB)\cos\theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - ar\cos\theta$$

Soit

$$BM = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

De même, en changeant θ par $(\pi - \theta)$, on obtient :

$$AM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$



D'où

$$V = \frac{Kq}{r}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

On sait que $r \gg a$ d'où $a/r \ll 1$, on peut donc utiliser le développement limité au premier ordre de la forme :

$$si\ x \ll 1 \Rightarrow \begin{cases}(1+x)^n \approx 1 + nx \\ (1-x)^n \approx 1 - nx\end{cases}$$

On obtient alors :

$$V = \frac{Kq}{r}\left[\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right]$$

Ou encore

$$V = K\frac{qa\cos\theta}{r^2} = K\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$

Pour $\theta = \pi/2$, $V = 0$ pour tous les points du plan médiateur de AB. Ce plan est donc une surface équipotentielle.

2. Champ crée par un dipôle électrostatique

Comme V ne dépend que de r et de θ, seules les composantes E_r et E_θ du champ $\vec{E}$ seront non nulles. On sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, donc :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = K\dfrac{2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = K\dfrac{p\sin\theta}{r^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = K\frac{3(\vec{p}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} = \frac{(3p\cos\theta)\vec{e}_r - p\vec{\imath}}{r^3} = K\frac{(3p\cos\theta)\vec{e}_r - p(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)}{r^3}$$

$$= K\frac{2p\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + K\frac{p\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta$$

3. Energie interne d’un dipôle

C’est l’énergie contenue dans le dipôle, c’est-à-dire, l’énergie du système formé par les deux charges $(-q)$ et $(+q)$ distantes de a. Elle correspond à l’énergie nécessaire pour amener une charge de l’infini à une distance a de l’autre charge.

$$W = -K\frac{q^2}{a}$$

4. Energie d’un dipôle électrostatique placée dans un champ $\vec{E}$

C’est l’énergie nécessaire pour amener les deux charges $(-q)$ et $(+q)$ du dipôle de l’infini à leur position en A et B respectivement en présence d’un champ électrostatique $\vec{E}$. On sait que l’énergie de la charge ponctuelle $(-q)$ dans le champ $\vec{E}$ est :

$$W_A = (-q)(V_A - V_\infty) = -qV_A$$

On sait également que l’énergie de la charge ponctuelle $(+q)$ dans le champ $\vec{E}$ est :

$$W_B = (+q)(V_B - V_\infty) = qV_B$$

Donc l’énergie totale du dipôle dans le champ $\vec{E}$ est :

$$W = W_A + W_B = q(V_B - V_A)$$

Or

$$V_B - V_A = \int_A^B dV \quad et\ \ dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

D'où

$$V_B - V_A = \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_A^B E\, dl \cos\alpha = -E\ \cos\alpha \int_A^B dl = -Ea\cos\alpha = -\vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

On a finalement :

$$W = q(V_B - V_A) = -q\vec{E}.\overrightarrow{AB} = -\left(q\overrightarrow{AB}\right).\vec{E} = -\vec{p}.\vec{E}$$

Mouvement d'un dipôle électrostatique dans un champ $\vec{E}$ uniforme :

Le dipôle subit la résultante des forces :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E}_0 + q\vec{E}_0 = \vec{0}$$

Donc, le dipôle ne se déplace pas.

D'autre part, le dipôle est soumis à un couple de force de même intensité, de directions différentes et des sens opposés. Ce couple est caractérisé par son moment :

$$\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}_A + \overrightarrow{OB}\wedge\vec{F}_B = \overrightarrow{OA}\wedge\left(-q\vec{E}\right) + \overrightarrow{OB}\wedge\left(q\vec{E}\right) = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\wedge\left(q\vec{E}\right) = \left(q\overrightarrow{AB}\right)\wedge\vec{E}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p}\wedge\vec{E}$$

Dans un champ extérieur uniforme, un dipôle subit un couple de forces qui produit une rotation du dipôle autour de son axe.

<u>Equilibre d'un dipôle :</u>

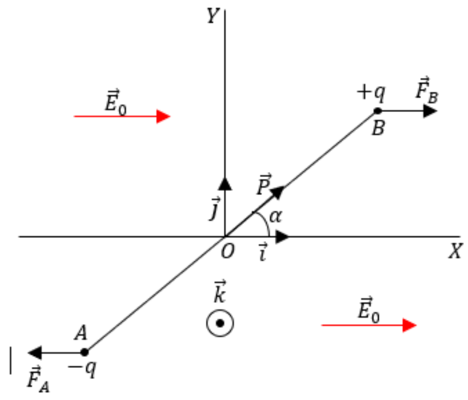
Le dipôle est en équilibre si :

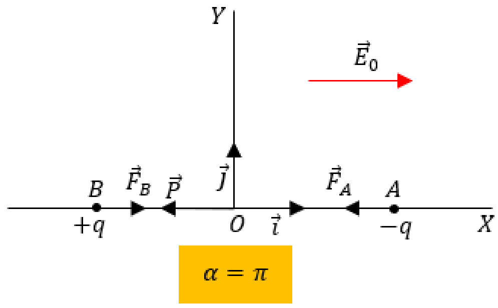
$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}\wedge\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow pE\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$$

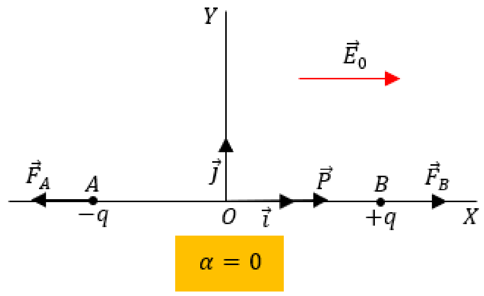
On a deux types d'équilibres :

- Si $\alpha = 0$, l'équilibre est dit stable.
- Si $\alpha = \pi$, l'équilibre est dit instable.

Le couple tend à orienter le dipôle de façon à ce que $\vec{p}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{E}$. Une application remarquable de ce phénomène est la matérialisation des lignes de champ. En effet, les particules qui forment des dipôles, plongées dans un champ électrostatique $\vec{E}$, s'orientent en dessinant les lignes de champ.


Y
$\vec{E}_0$
$+q$
$\vec{F}_B$
B
$\vec{P}$
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$
X
$\vec{k}$
$\vec{E}_0$
A
$-q$
$\vec{F}_A$


Y
$\vec{E}_0$
B
$\vec{F}_B$
$\vec{P}$
$\vec{j}$
$\vec{F}_A$
A
$+q$
O
$\vec{i}$
$-q$
X
$\alpha = \pi$


Y
$\vec{E}_0$
$\vec{F}_A$
A
$\vec{j}$
$\vec{P}$
B
$\vec{F}_B$
$-q$
O
$\vec{i}$
$+q$
X
$\alpha = 0$