Série de TD n°5 (à traiter en 3 séances)

Champ et potentiel électriques créés par des distributions continues de charges

Exercice 1 :

Un fil rectiligne, assimilé à un segment de droite de longueur L porté par l'axe (OY), est uniformément chargé avec une densité linéique λ positive (voir Figure 1).

1. Sachant que l'élément de longueur dl du fil porte une charge élémentaie $dq = \lambda dl$, donner l'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OX), tel que $OM = x > 0$.
2. En introduisant l'angle θ (voir Figure 1), donner l'expression de $d\vec{E}(M)$ en fonction de λ, x, θ et $d\theta$.
3. Par intégration, déduire l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le fil au point M en fonction de λ, x et α.
4. Déduire le champ électrique créé au point M par : a) le fil semi-infini porté par l'axe (OY) b) le fil semi-infini porté par l'axe (OY') c) le fil infini porté par l'axe $(Y'OY)$.
5. Déduire le potentiel créé au point M par le fil infini.

Exercice 2 :

On considère deux fils infiniment longs et minces : un fil confondu avec l'axe $(X'OX)$ portant une densité linéique de charge uniforme $(+\lambda)$, et un fil confondu avec l'axe $(Y'OY)$ portant une densité linéique de charge uniforme (-2λ).

Déterminer l'expression du champ électrique totale $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charges en un point $M(x, y)$ dans les quatre régions du plan délimitées par les fils : a) $x > 0, y > 0$ b) $x < 0, y > 0$ c) $x < 0, y < 0$ d) $x > 0, y < 0$

Exercice 3 :

Soit un secteur circulaire de rayon R, de centre O, d'angle β et d'axe (OZ). Ce dernier porte une charge totale Q répartie uniformément sur sa surface avec une densité σ positive (voir Figure 2).

1. Sachant que l'élément de surface ds du secteur porte une charge élémentaire $dq = \sigma ds = \sigma \rho d\rho d\theta$, donner l'expression du potentiel électrique élémentaire $dV(M)$ engendré en un point M de l'axe (OZ), tel que $OM = z > 0$.
2. Donner l'expression de $dV(M)$ en fonction de $\sigma, z, \rho, d\rho$ et $d\theta$.
3. Par intégration, déduire l'expression du potentiel électrique total $V(M)$ créé par le secteur au point M.
4. Déduire l'expression de $V(M)$ dans le cas a) d'un demi-disque de centre O et de rayon R b) d'un disque de centre O et de rayon R.
5. Déduire les champs électriques créés par le disque et le plan infini au point M.

Exercice 4 :

1. Une charge q positive est distribuée uniformément sur la circonférence d'un cercle de centre O et de rayon R, contenu dans le plan (OXY) (voir Figure 3-1). Si λ est la densité linéique de charge,

déterminer le potentiel électrique $V(M)$ créé par cette distribution en un point M apartenant à l'axe $(Z'OZ)$ de la spire, tel que $OM = z > 0$. Déduire le champ électrique créé par la spire au point M.

2. Dans le schéma de la figure 3-2, déterminer le potentiel électrique $V(N)$ au point N centre du segment $OO' = 2z$, sachant que les deux spires ont le meme rayon R et portent des charges avec des densités linéiques $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = +2\lambda$, respectivement. Déduire le champ électrique $\vec{E}(N)$ en ce point.

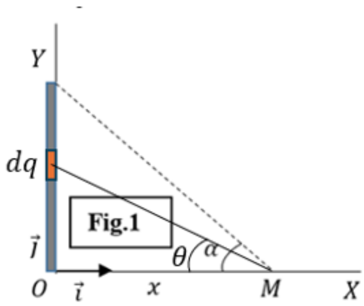


Fig.1

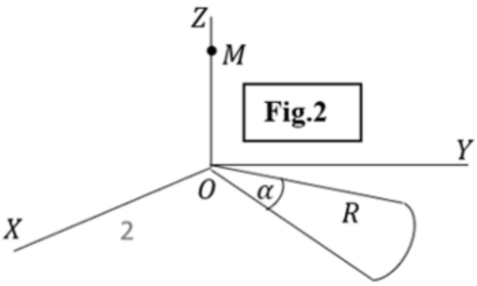


Fig.2

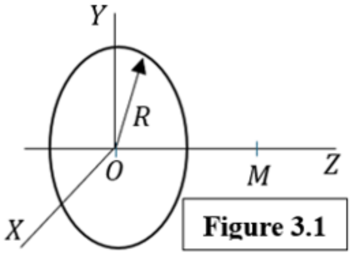


Figure 3.1

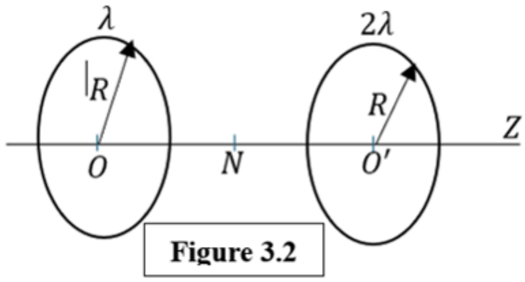
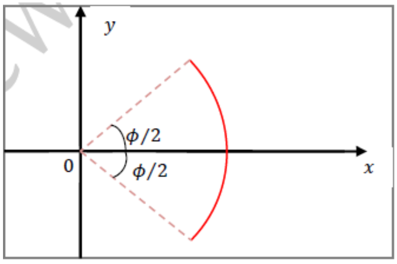


Figure 3.2

Exercices supplémentaires :

Exercice S1 :

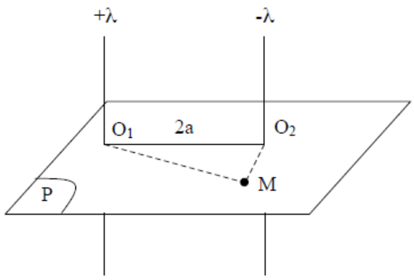
Un fil portant une charge positive q a la forme d'un arc de cercle de centre O, de rayon R d'angle φ (voir figure ci-contre).



1. Sachant que la charge q est uniformément répartie avec une densité linéique λ, calculer le vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point O créé par cette distribution de charges.
2. Que devient $\vec{E}$ pour l'angle $\varphi = 0, \varphi = \pi, \varphi = 2\pi$?

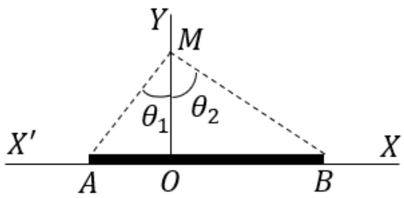
Exercice S2 :

Considérons deux fils infinis, parallèles, distants de $2a$, portant respectivement des densités linéiques de charge $+\lambda$ et $-\lambda$. Soit un plan P perpendiculaire à la direction des fils et un point M dans ce plan (voir figure ci-contre).
Calculer le potentiel créé par les deux fils au point$M$. On prendra le potentiel zéro au centre de la distance séparant les deux fils.



Exercice S3 :

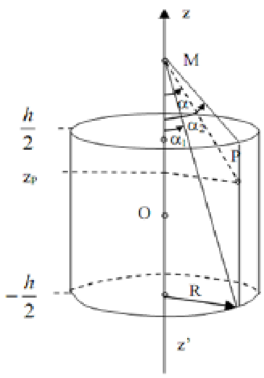
On considère une portion de fil AB uniformément chargée ; portée par l'axe $(X'OX)$. La densité linéique de charge est $\lambda > 0$ (voir figure ci-contre).



1. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ au point M de l'axe (OY), tel que $OM = y > 0$ en fonction de θ_1 et θ_2.
2. Déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par un fil infini passant par A et B et ayant une densité linéique $\lambda > 0$.

Exercice S4 :

Considérons un cylindre d'axe $Z'Z$ tel que l'origine O soit confondue avec son centre (voir figure ci-dessous). Ce cylindre est uniformément chargé sur sa surface latérale avec une densité superficielle uniforme $\sigma > 0$. Donner l'expression du champ électrostatique en un point M de l'axe du cylindre.



Corrigé

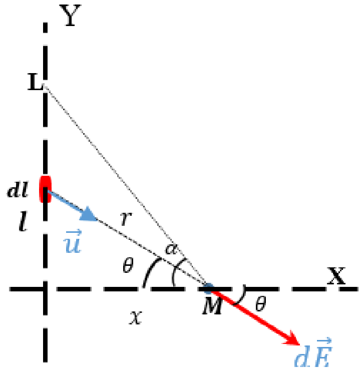
Exercice 1 :

1. L'expression du champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ engendré en un point M de l'axe (OX), tel que $OM = x > 0$:

$$d\vec{E}(M) = K\frac{dq}{r^2}\vec{u} = K\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$

2. En introduisant l'angle θ donner l'expression de $d\vec{E}(M)$ en fonction de λ, x, θ et $d\theta$:

D'après la figure :



$$\tan\theta = \frac{l}{x} \rightarrow l = x\tan\theta \rightarrow dl = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow r = \frac{x}{\cos\theta}$$

$$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Ce qui donne :

$$d\vec{E}(M) = K\frac{\lambda}{x}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})d\theta$$

3. Par intégration, déduire l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M)$ créé par le fil au point M en fonction de λ, x et α :

$$\vec{E}(M) = \int_{(L)} d\vec{E}(M) = K\frac{\lambda}{x}\int_0^{\alpha}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})d\theta = K\frac{\lambda}{x}[\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}]_0^{\alpha}$$

$$\vec{E}(M) = K\frac{\lambda}{x}[\sin\alpha\,\vec{\imath} + (\cos\alpha - 1)\vec{\jmath}]$$

4. Déduire le champ électrique créé au point M par :
   a) Le fil semi-infini porté par l'axe (OY) :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{E}_{(OY)}(M) = K\frac{\lambda}{x}[\vec{\imath} - \vec{\jmath}]$$

   b) Le fil semi-infini porté par l'axe (OY') :

Par symétrie par rapport à l'axe (OX) : $\vec{\jmath} \rightarrow -\vec{\jmath}$

$$\vec{E}_{(OY')}(M) = K\frac{\lambda}{x}[\vec{\imath} + \vec{\jmath}]$$

   c) Le fil infini porté par l'axe $(Y'OY)$:

Principe de superposition :

$$\vec{E}_{(Y'OY)}(M) = \vec{E}_{(OY)}(M) + \vec{E}_{(OY')}(M) = 2K\frac{\lambda}{x}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$

5. Déduire le potentiel créé au point M par le fil infini.

$$V(M) = -\int \vec{E}.\vec{dl} + C = -\int E_x dx + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{x} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

Exercice 2 :

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{X'OX}(M) + \vec{E}_{Y'OY}(M)$$

Région 1 : $x > 0, y > 0$

$$\vec{E}(M) = -\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 2 : $x < 0, y > 0$

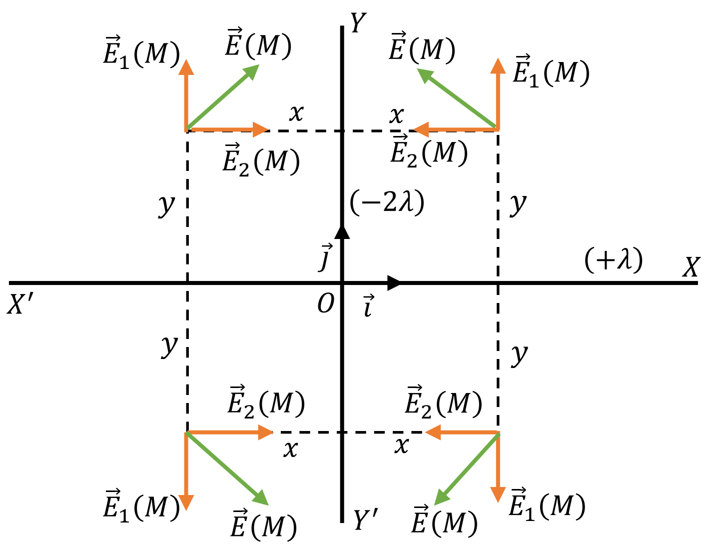
$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 3 : $x < 0, y < 0$

$$\vec{E}(M) = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

Région 4 : $x > 0, y < 0$

$$\vec{E}(M) = -\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\vec{\jmath}$$

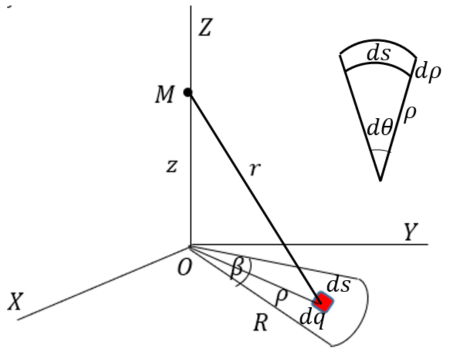


Exercice 3 :

1. L'expression de $dV(M)$, du potentiel électrique élémentaire engendré en un point M de l'axe (OZ), tel que $OM = z > 0$:

$$dV(M) = K\frac{dq}{r} = K\frac{\sigma ds}{r} = K\frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{r}$$

2. L'expression de $dV(M)$ en fonction de $\sigma, z, \rho, d\rho$ et $d\theta$:



D'après la figure ;

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Donc :

$$dV(M) = K\frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

3. Par intégration, déduire l'expression du potentiel électrique total $V(M)$ créé par le secteur au point M :

$$V(M) = \int_S dV(M) = K\sigma \int_0^\beta d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma\beta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma\beta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{\rho^2 + z^2}\right]_0^R$$

$$V(M) = \frac{\sigma\beta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right]$$

4. Déduire :
   a) L'expression de $V(M)$ dans le cas d'un demi-disque de centre O et de rayon R :

$$\alpha = \pi \rightarrow V(M) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right]$$

   b) Le potentiel électrique créé par un disque de centre O et de rayon R :

$$\alpha = 2\pi \rightarrow V_D(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right]$$

5. Déduire les champs électriques créés par le disque et le plan infini au point M :

$$\vec{E}_{(D)}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{k}$$

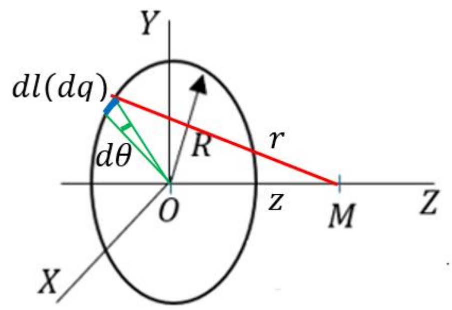
$$\vec{E}_{(P)}(M) = \lim_{R\to\infty} \vec{E}_{(D)}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

Exercice 4 :

1. Le potentiel électrique $V(M)$:

L'élément de longueur $dq = \lambda dl$, centré autour du point P, va créer au point M un potentiel élémentaire :

$$dV(M) = K\frac{dq}{r} = K\frac{\lambda dl}{r}$$



D'après la figure ci-contre :

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}\,; dl = Rd\theta$$

La substitution donne :

$$dV(M) = K\frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Le potentiel total $V(M)$ s'obtient par intégration sur tout le fil :

$$V(M) = \int_{(L)} dV(M) = K\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

2. Le potentiel électrique $V(N)$ au point N centre du segment OO' :

Principe de superposition :

$$V(N) = V_{(\lambda)} + V_{(2\lambda)} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{2\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{3\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Déduire le champ électrique en ce point :

$$\vec{E}(N) = -\overrightarrow{grad}V(N) = -\frac{dV(N)}{dz}\vec{k} = \frac{3\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\right)\vec{k}$$