

Série N°6 (A traiter en 3 séances et demie)

Exercice 1

1) Calculer le flux du champ : $\vec{E} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ à travers la surface du cube limité par: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

2) Déterminer le flux du champ électrique \vec{E} à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R. ou A et λ sont constantes

$$\vec{E} = A \frac{e^{-r/\lambda}}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{u}_r$$

Exercice 2

On considère une distribution de charge constituée par la réunion d'un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ coïncidant avec l'axe Oz, et d'un cylindre infini de rayon R, portant une densité surfacique $\sigma > 0$ et constante (Figure 2). En appliquant le théorème de Gauss calculer:

- 1) Le champ électrostatique créé en un point M à l'intérieur du cylindre.
- 2) Le champ électrostatique créé en un point M à l'extérieur du cylindre.

Exercice 3

Considérons deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). La sphère intérieure de rayon R_1 est chargée avec une densité volumique variable $\rho(r) = \alpha r$, tel que $\alpha > 0$ (Constante positive), quant à la sphère extérieure de rayon R_2 elle est chargée avec une densité surfacique $\sigma > 0$ et constante (Figure 3).

1) En utilisant le théorème de Gauss déterminer: le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace (distinguer les différentes régions: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$). Tracer le graphe du champ électrostatique en fonction de r.

2) Le potentiel électrostatique $V(r)$ en tout point de l'espace, on admettra que le potentiel est nul à l'infini, et donner la représentation graphique de V en fonction de r.

3) On place une charge Q à l'extérieur du système. Quelle doit être la distribution σ pour que la charge Q ne ressente aucune force du système des deux sphères?

Exercice 4

Soit deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tel que $R_1 < R_2$ et de hauteur infinie. Le cylindre de rayon R_1 porte une distribution surfacique de densité $\sigma > 0$. De même le deuxième cylindre de rayon R_2 porte une distribution surfacique de densité 2σ (Figure 4).

1) En utilisant le théorème de Gauss, trouver l'expression du champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace (distinguer les différentes régions: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$).

2) En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace. On prend $V(R_1) = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln(R_1)$

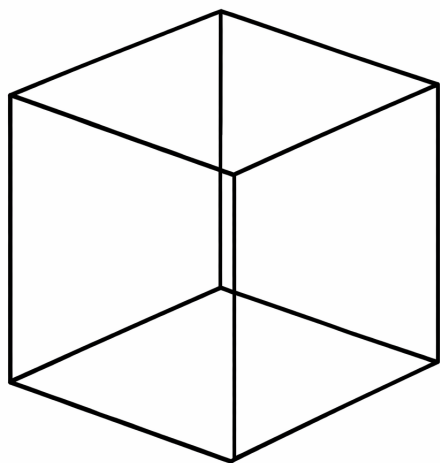


Figure 1: .

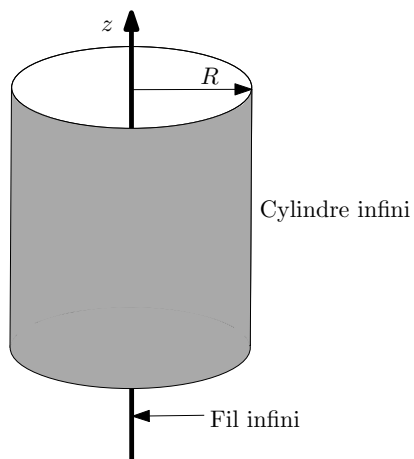


Figure 2

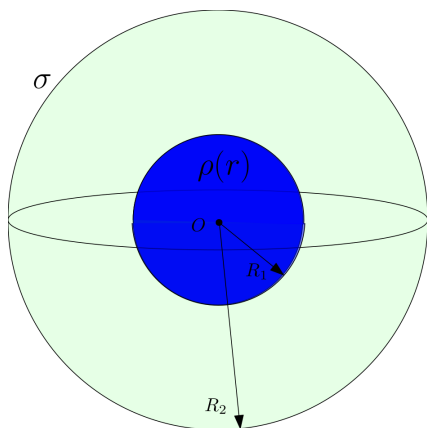


Figure 3

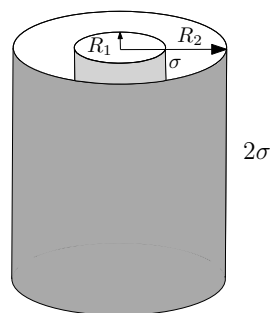


Figure 4

Correction

Exercice 1

1) Le flux du champs \vec{E} est definit:

$$\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{S}$$

a) On fixe $x = 0$ et $d\vec{S} = -dydz\vec{i}$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \iiint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dydz\vec{i} \\ &= - \int \int 4xz dydz = 0 \end{aligned}$$

b) On fixe $x = 1$ et $d\vec{S} = dydz\vec{i}$

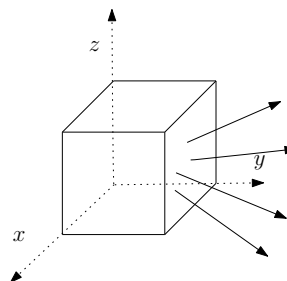
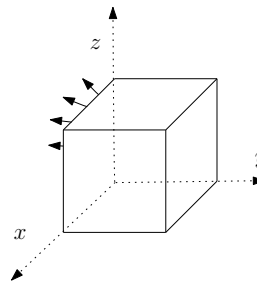
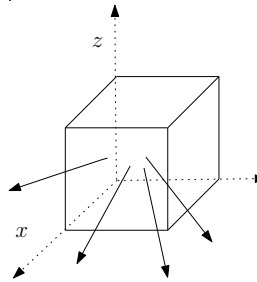
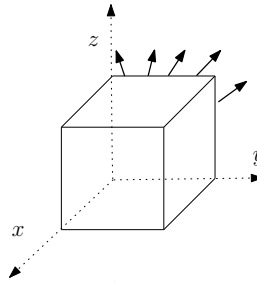
$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \iiint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dydz\vec{i} \\ &= \int_0^1 4z dz \int_0^1 dy = 2 \end{aligned}$$

c) On fixe $y = 0$ et $d\vec{S} = -dx dz \vec{j}$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= - \iiint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dx dz \vec{j} \\ &= \int \int y^2 dx dz = 0 \end{aligned}$$

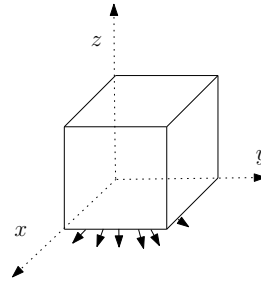
d) On fixe $y = 1$ et $d\vec{S} = dx dz \vec{j}$

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= \iiint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dx dz \vec{j} \\ &= - \int_0^1 y^2 dx \int_0^1 dz = -1 \end{aligned}$$



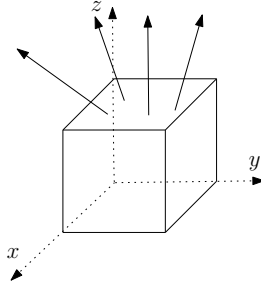
e) On fixe $z = 0$ et $d\vec{S} = -dxdy\vec{k}$

$$\begin{aligned}\Phi_5 &= - \iint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dxdy\vec{k} \\ &= - \int \int yz dy dx = 0\end{aligned}$$



f) On fixe $z = 1$ et $d\vec{S} = dxdy\vec{k}$

$$\begin{aligned}\Phi_6 &= \iint (4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}) dxdy\vec{k} \\ &= \int_0^1 y dy \int_0^1 dx = 1/2\end{aligned}$$



Le flux total: $\Phi_{tot} = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2) Le flux du champ électrique \vec{E} à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R

$$\oiint \vec{E}d\vec{S} = E \cdot S_{sphere} = 4\pi R^2 E$$

Car le champs \vec{E} et la surface $d\vec{S}$ sont colineaire et la composante radial radial du champ est constante sur une sphère de rayon R

Exercice 2

1) un fil rectiligne infini et uniformément chargé est symétrique sous inversion, sous rotation et même sous translation \implies **symétrie cylindrique**.

Lorsque M se trouve à l'intérieur du cylindre: $r < R$, le flux du champs \vec{E}_{int} depends seulement du fil infini, la contribution de σ au flux interieur est nul. Par symétrie pour un fil infini le champ est radial, et ne peut dépendre en un point M que de la distance r $\vec{E}_{int} = \vec{E}_{int}(r)$.

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur h , d'axe Oz et de rayon r , passant par M où l'on veut calculer le champ. Ce cylindre fermé à ses extrémités par deux bases circulaires constitue la surface de Gauss.

$$\Phi = \oiint \vec{E}_{int}d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint E_{int}(r)rd\varphi dz = rE_{int}(r) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Au final on obtien: $E_{int} \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \implies E_{int} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$

2) Lorsque M se trouve à l'extérieur du cylindre $r > R$.

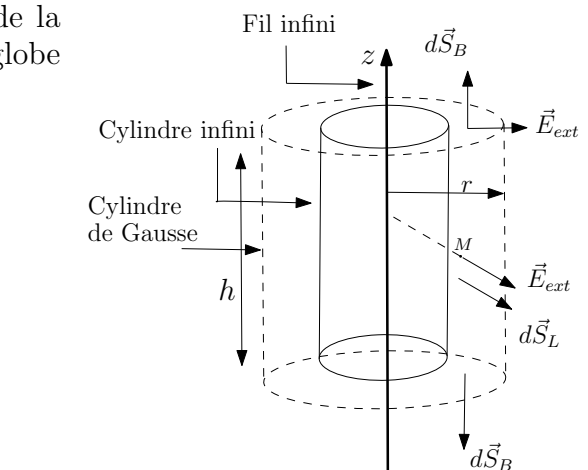
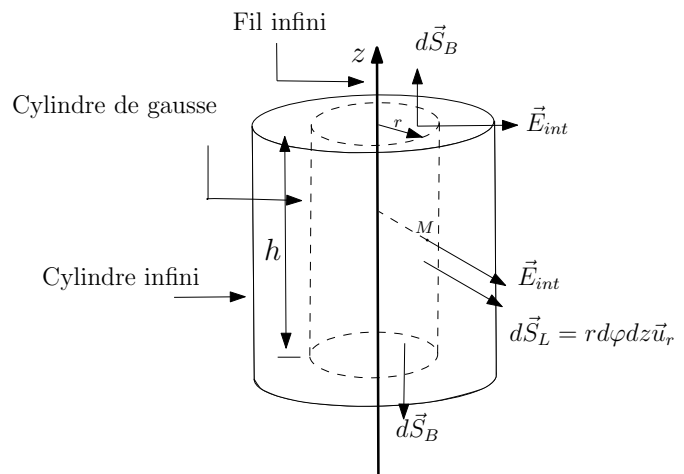
Les conditions de calculé répondent exactement à ceux de la 1er question sauf que cette fois ci la surface de gauss englobe le fil et le cylindre chargé, tel que

$$\sum Q_{int} = \lambda h + \oiint \sigma R d\varphi dz = \lambda h + 2\pi R \sigma h$$

Finalement

$$\Phi = \oiint \vec{E}_{ext}d\vec{S} = 2\pi r h E_{ext} = \frac{(\lambda + 2\pi R \sigma) h}{\epsilon_0}$$

$$E_{ext} = \frac{(\lambda + 2\pi R \sigma)}{2\pi r \epsilon_0}$$



Exercice 3

1) **1er cas:** $r < R_1$

Le flux sortant Φ de la sphere de Gausse

$$\Phi_1 = \oiint E_1 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = E_1 4\pi r^2$$

La charge intérieure à la sphère de Gauss est :

$$Q_{int} = \iiint \rho(r) dV = 4\pi\alpha \int_0^r r^3 dr = \alpha\pi r^4$$

Au final : $E_1 = \frac{\alpha r^2}{4\epsilon_0}$

2ème cas: $R_1 < r < R_2$

Le flux sortant Φ de la sphere de Gausse

$$\Phi_2 = \oiint E_2 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = E_2 4\pi r^2$$

La charge intérieure à la sphère de Gauss est : $Q_{int} = \alpha\pi R_1^4$

Au final: $E_2 = \frac{\alpha R_1^4}{4\epsilon_0 r^2}$

3ème cas: $R_2 < r$

Le flux sortant Φ de la sphere de Gausse

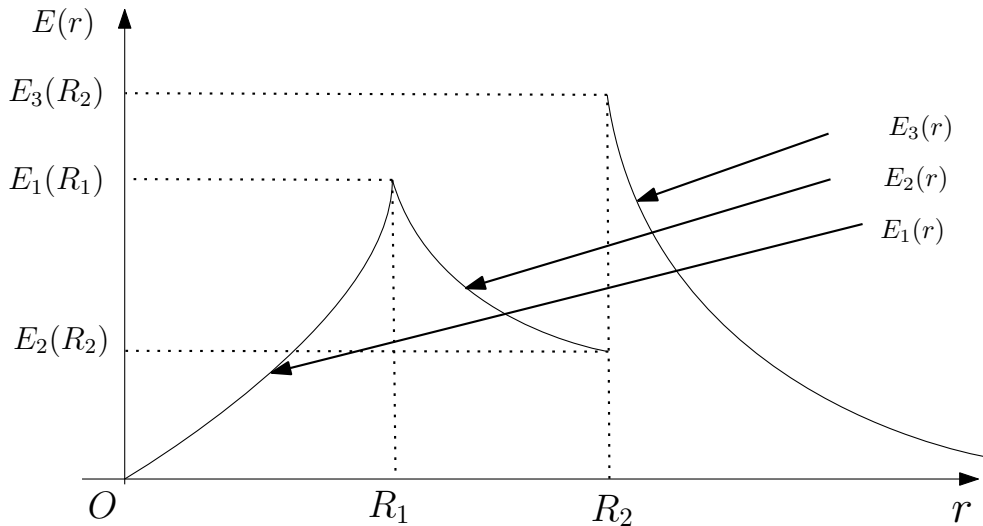
$$\Phi_3 = \oiint E_3 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = E_3 4\pi r^2$$

La charge intérieure à la sphère de Gauss est:

$$Q_{int} = Q_{R_1} + Q_{R_2} = \alpha\pi R_1^4 + 4\pi\sigma R_2^2 = \pi (\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2)$$

Au final: $E_3 = \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\epsilon_0 r^2}$

Tracer le graphe du champs electrostatique



Remarquons en particulier que $E(r)$ est continu dans tout l'espace, en particulier pour $r < R_2$; où l'on constate que $E_1(R_1) = E_2(R_1)$, ce fait est général en présence d'une distribution volumique de charges ; les discontinuités de $E(r)$ apparaissent en présence d'une distribution superficielle de charges, $E_2(R_2) \neq E_3(R_3)$

2) Détermination du potentiel électrostatique $V(\mathbf{r})$ en tout point de l'espace :

Nous savons que le champs derive d'un potentiel : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Le champ \vec{E} étant radial, ceci nous permet d'écrire:

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = - \int E(r) dr$$

1er cas : $r > R_2$

$$V_3(r) = - \int E_3 dr = - \left(\frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\epsilon_0} \right) \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\epsilon_0 r} + C_1$$

Pour $r \rightarrow \infty$ we have $V = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

2ème cas : $R_1 < r < R_2$

$$V_2(r) = - \int E_2 dr = - \int \frac{\alpha R_1^4}{4\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\alpha R_1^4}{4\epsilon_0 r} + C_2$$

Nous allons déterminer la constante C_2 , en exprimant la continuité de $V(r)$ pour $r = R_2$; cette condition de continuité se traduit en écrivant : $V_3(R_2) = V_2(R_2)$, On obtient $C_2 = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$

$$V_2(r) = \frac{\alpha R_1^4}{4\epsilon_0 r} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

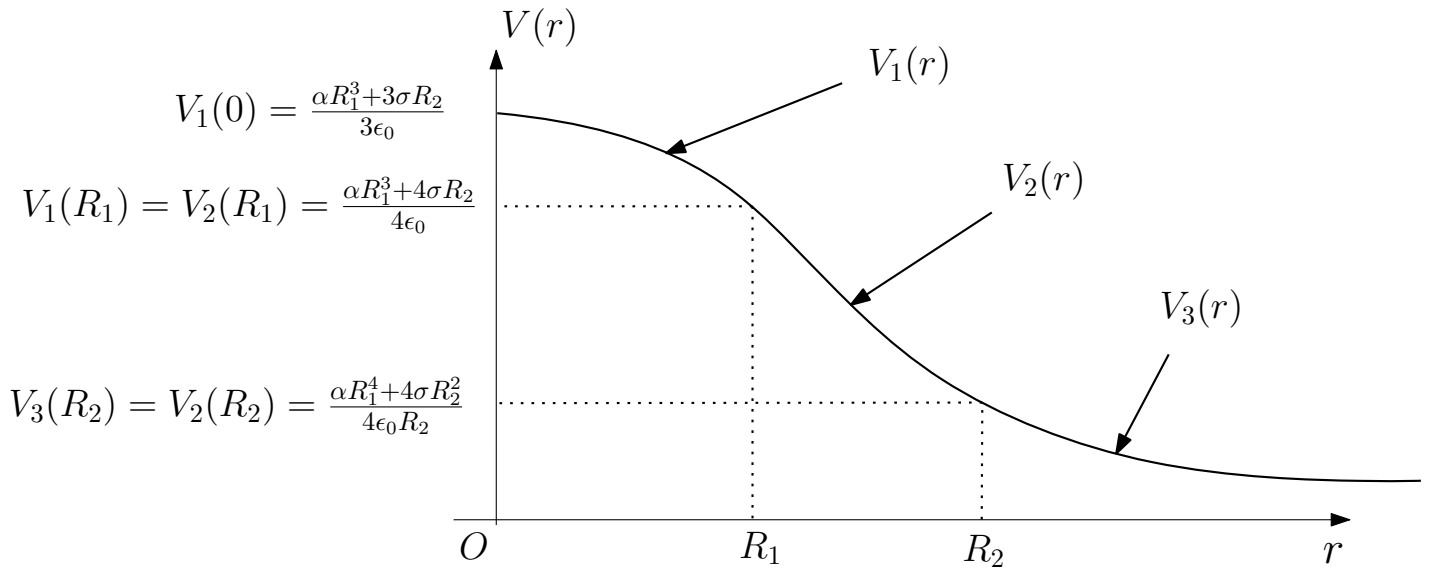
3ème cas : $r < R_1$

$$V_1(r) = - \int E_1 dr = - \frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0} + C_3$$

Pour le calcul de C_3 , on utilise les mêmes conditions que celles affichées au 2ème cas, mais pour $r = R_1$

$$C_3 = \frac{\alpha R_1^3 + 3\sigma R_2}{3\epsilon_0}$$

Répresentation graphique



3) Pour que **Q** ne ressente aucune force: $E_3 = 0$

$$E_3 = \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\epsilon_0 r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\alpha \left(\frac{R_1^2}{2R_2} \right)^2$$

La distribution surfacique σ est de signe opposé à la distribution volumique α