Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $\boldsymbol{(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+2x+2xy^2=0}$, **2.** $\boldsymbol{(x^2+y^2)dx-xydy=0}$, **avec** $\boldsymbol{y(1)=2}$,

3. $x^3+2y^2y'=0$, 4. $x^2y'-e^y=0$, **5.** $\boldsymbol{(x^2+1)y'+xy=0}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $\boldsymbol{y'-4y=3}$, $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$, 2. $y'+y=2e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 3. $y'+y=x^2$,

4. $y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=1$, $x\in]0,+\infty[$,

5. $\boldsymbol{x(1+\ln^2 x)y'+2(\ln x)y=1}$, $\boldsymbol{x\in]0,+\infty[}$, **6.** $\boldsymbol{xy'+6y-3xy^4=0}$

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1. $\boldsymbol{y''-3y'+2y=0}$, **2.** $\boldsymbol{y''+2y'+y=0}$, **3.** $\boldsymbol{y''-2y'+2y=0}$,

4. $y''-2\alpha y'+y=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y''-y=x^2+x+1$, **2.** $\boldsymbol{y''-2y'-8y=e^x}$, **3.** $\boldsymbol{y''-2y'=\sin x}$,

4. $\boldsymbol{y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}}$ **avec** $\boldsymbol{y(0)=0,\ y'(0)=0}$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 :

1. $\boldsymbol{(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+2x+2xy^2=0}$ .... $\boxed{1}$
   $\boxed{1} \Rightarrow (1+x^2)^2\frac{dy}{dx}=-2x(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\,dy=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$
   $\Rightarrow \arctan y=\frac{1}{1+x^2}+C, \quad C\in\mathbb{R} \Rightarrow y(x)=\tan\left(\frac{1}{1+x^2}+C\right), \quad C\in\mathbb{R}.$

2. $\boldsymbol{(x^2+y^2)dx-xydy=0,}$ **avec** $\boldsymbol{y(1)=2}$ .... $\boxed{2}$
   $\boxed{2} \Rightarrow x^2+y^2=xy\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$. Donc $\boxed{2}$ est de la forme $y'=f(\frac{y}{x})$. Si on pose $v=\frac{y}{x}$ on obtient $y=xv \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. Comme $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$, alors $v+x\frac{dv}{dx}=v+\frac{1}{v}$ .... $\boxed{2}'$
   $\boxed{2}' \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v} \Rightarrow x\,dv=\frac{1}{v}\,dx \Rightarrow v\,dv=\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int v\,dv=\int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \frac{v^2}{2}=\ln|x|+C \Rightarrow$ $v^2=2\ln|x|+2C, c\in\mathbb{R} \Rightarrow v=\pm\sqrt{2\ln|x|+2C}$, $C\in\mathbb{R}$. Comme $y=vx$, alors la solution générale de l'équation $\boxed{2}$ est donnée par $y(x)=\pm x\sqrt{2\ln|x|+K}$, avec $K=2C, C\in\mathbb{R}$. La condition $y(1)=2 \Rightarrow \pm1\sqrt{2\ln|1|+K}=2 \Rightarrow \sqrt{K}=2 \Rightarrow K=4$, donc la solution finale est $y(x)=\pm x\sqrt{2\ln|x|+4}$.

3. $x^3+2y^2y'=0$ .... $\boxed{3}$
   $\boxed{3} \Rightarrow 2y^2\frac{dy}{dx}=-x^3 \Rightarrow 2y^2\,dy=-x^3\,dx \Rightarrow \int 2y^2dy=\int -x^3dx \implies \frac{2}{3}y^3=-\frac{1}{4}x^4+C$, $C\in\mathbb{R} \Rightarrow y^3=-\frac{3}{8}x^4+K$, $K=\frac{3C}{2} \Rightarrow y(x)=\left(-\frac{3}{8}x^4+K\right)^{1/3}$, $K\in\mathbb{R}$.

4. $x^2y'-e^y=0$ .... $\boxed{4}$
   $\boxed{4} \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx}=e^y \Rightarrow e^{-y}\,dy=\frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \int e^{-y}\,dy=\int \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow -e^{-y}=-\frac{1}{x}+C \Rightarrow$ $e^{-y}=\frac{1}{x}-C$. Donc, la solution générale est : $y(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}-C\right)$, $C\in\mathbb{R}$.

5. $\boldsymbol{(x^2+1)y'+xy=0}$ .... $\boxed{5}$
   $\boxed{5} \Rightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy=0 \Rightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx}=-xy \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow$
   $\frac{1}{y}\,dy=-\frac{x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy=-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy=-\int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow$
   $\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, $C\in\mathbb{R} \Rightarrow e^{\ln|y|}=e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c} \Rightarrow |y|=e^{C+\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})}$
   $\Rightarrow |y|=e^C\cdot e^{\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})}=\frac{e^C}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y=\frac{K}{\sqrt{x2+1}}$, $K\in\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. $\boldsymbol{y'-4y=3,} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ .... $\boxed{21}$
   ▷ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de $\boxed{21}$ est donnée comme suit : $y'-4y=0 \Rightarrow y'=4y$. Il est clair que $y=0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y\neq0$, alors $y'=4y \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=4 \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy=4\,dx \Rightarrow$ $\int \frac{1}{y}\,dy=4\int dx \Rightarrow \ln|y|=4x+C$, $C\in\mathbb{R} \Rightarrow |y|=e^C\cdot e^{4x} \Rightarrow y=\pm e^C\cdot e^{4x}$, $C\in\mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h=Ke^{4x}$, $k\in\mathbb{R}$.
   ▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de $\boxed{21}$). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p=K(x)e^{4x}$. En remplaçant dans $\boxed{21}$ on obtient : $(K(x)e^{4x})'-4K(x)e^{4x}=3 \Rightarrow (K(x)'e^{4x})+4K(x)e^{4x}-4K(x)e^{4x}=3\Rightarrow$ $K'(x)e^{4x}=3 \implies K(x)=\int 3e^{-4x}\,dx=-\frac{3}{4}e^{-4x} \Rightarrow y_p=-\frac{3}{4}e^{-4x}e^{4x}=-\frac{3}{4}$. Donc, la solution générale est : $y(x)=y_p+y_h=-\frac{3}{4}+Ke^{4x}, \quad K\in\mathbb{R}$.

2. $y' + y = 2e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .... $\boxed{22}$

$\triangleright$ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de $\boxed{22}$ est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -1\,dx$ $\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx \Rightarrow \ln|y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de $\boxed{22}$). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans $\boxed{22}$ on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow (K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = 2e^x$ $\Rightarrow K'(x)e^{-x} = 2e^x \implies K(x) = \int 2e^{2x}\,dx = e^{2x} \Rightarrow y_p = e^{2x}e^{-x} = e^x$. Donc, la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = e^x + Ke^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

3. $y' + y = x^2, \quad x \in]0, +\infty[$ .... $\boxed{23}$

$\triangleright$ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de $\boxed{23}$ est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -1\,dx$ $\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx \Rightarrow \ln|y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de $\boxed{23}$). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans $\boxed{23}$ on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow$
$(K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow K'(x)e^{-x} = x^2 \implies K(x) = \int x^2e^x\,dx =$ $(ax^2 + bx + c)e^x$, avec a, b et c sont des valeurs à déterminer.
$\int x^2e^x\,dx = (ax^2 + bx + c)e^x \Rightarrow x^2e^x\,dx = [(ax^2 + bx + c)e^x]' \Rightarrow$
$x^2e^x\,dx = (ax^2 + bx + c)e^x + (2ax + b)e^x \Rightarrow x^2e^x\,dx = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x \Rightarrow$
a=1, b=-2 et c=2 $\Rightarrow y_p = (x^2 - 2x + 2)$. Donc la solution générale est :
$y(x) = y_p + y_h = (x^2 - 2x + 2) + Ke^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

4. $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1, \quad x \in]0, +\infty[$ .... $\boxed{24}$

$\triangleright$ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de $\boxed{24}$ est donnée comme suit : $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 0 \Rightarrow y' = (2x - \frac{1}{x})y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = (2x - \frac{1}{x})y \Rightarrow$
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (2x - \frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = (2x - \frac{1}{x})\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int(2x - \frac{1}{x})\,dx \Rightarrow$
$\ln|y| = x^2 - \ln(x) + C \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{2x}.e^{\ln(\frac{1}{x}} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{e^{x^2}}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = K\frac{e^{x^2}}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de $\boxed{24}$). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)\frac{e^{x^2}}{x}$. En remplaçant dans $\boxed{24}$ on obtient : $(K(x)\frac{e^{x^2}}{x})' - (2x - \frac{1}{x})(K(x)\frac{e^{x^2}}{x}) = 1 \Rightarrow K'(x)\frac{e^{x^2}}{x} = 1 \Rightarrow K'(x) = xe^{-x^2}$ $\implies K(x) = \int xe^{-x^2}\,dx$. Posons $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow K(x) = \frac{1}{2}\int e^{-u} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ $\Rightarrow y_p = -\frac{1}{2x}$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = -\frac{1}{2x} + K\frac{e^{x^2}}{x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

5. $\boldsymbol{x(1 + \ln^2 x)y' + 2(\ln x)y = 1, \quad x \in]0, +\infty[}$ **........................** $\boxed{25}$.
L'équation $\boxed{25} \Leftrightarrow y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}y = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ .... $\boxed{25}'$

$\triangleright$ La solution de l'équation sans second membre (homogène) de $\boxed{25}'$ est donnée comme suit : $y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)} \Rightarrow$
$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = -\frac{2u}{1+u^2}\,du$, avec $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$. Donc $\Rightarrow \ln|y| = -\frac{2u}{1+u^2}\,du = -\ln(1 + u^2) + C = -\ln(1 + \ln^2 x) + C$,

$C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{\ln(\frac{1}{1+\ln^2 x}} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = \frac{K}{1+\ln^2 x}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante (recherche de la solution particulière de $\boxed{25}'$.

Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = \frac{K(x)}{1+\ln^2 x}$. En remplaçant dans $\boxed{25}'$ on obtient : $\frac{K'(x)}{1+\ln^2 x}$ - $\frac{K(x)\cdot 2\ln x}{x(1+\ln^2 x)^2} + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)} \cdot \frac{K(x)}{1+\ln^2 x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \Rightarrow \frac{K'(x)}{1+\ln^2 x} = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ $\Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow K(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \Rightarrow y_p = \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = \frac{K}{1+\ln^2 x} + \frac{\ln x}{(1+\ln^2 x)} = \frac{K+\ln x}{1+\ln^2 x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

6. $\boldsymbol{xy' + 6y - 3xy^4 = 0}$ .... $\boxed{26}$.
   Une équation de Bernoulli est de la forme : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, où $n \neq 0, 1$. Ici, nous pouvons réécrire l'équation $\boxed{26}$ sous cette forme :
   Pour $x \neq 0$ $\boxed{26} \Rightarrow y' + \frac{6}{x}y = 3y^4$ (Une équation de Bernoulli avec ($P(x) = \frac{6}{x}$, $Q(x) = 3$ et $n = 4$) .... $\boxed{26}'$.
   Pour résoudre l'équation $\boxed{26}'$ on effectue le changement de variable : $z = y^{1-n} = y^{-3}$, alors $z' = \frac{d}{dx}\left(y^{-3}\right) = -3y^{-4}y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}y^4 z'$. En substituant dans l'équation $\boxed{26}'$ les expressions de y et de y', on obtient $-\frac{1}{3}xz' + 6z - 3x = 0 \Rightarrow xz' + 18z - 9x = 0$. Pour $x \neq 0$, l'équation $xz' + 18z - 9x = 0 \Leftrightarrow z' - \frac{18}{x}z = -9$ (équation linéaire de premier ordre). Pour la résolution, nous allons résoudre l'équation homogène (sans second membre) suivante : $z' - \frac{18}{x}z = 0$.
   ▷ Il est clair que z=0 est une solution (solution triviale). Supposant maintenant que $z \neq 0$, alors $z' - \frac{18}{x}z = 0 \Rightarrow z' = \frac{18}{x}z \Rightarrow \frac{1}{z}z' = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{18}{x} \Rightarrow$ $\frac{1}{z}\,dz = \frac{18}{x}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{18}{x}\,dx \Rightarrow \ln|z| = 18\ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|z| = \ln x^{18} + C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^c x^{18}$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \pm e^c x^{18}$, $C \in \mathbb{R}$. Comme $z = 0$ est une solution, alors, la solution homogène est : $z = kx^{18}$, $k \in \mathbb{R}$.
   ▷ Pour déterminer la solution générale, nous allons appliquer la méthode de la variation de la constante afin d'obtenir la solution particulière de l'équation $z' - \frac{18}{x}z = -9$. Pour ce faire on pose $z_p = k(x)x^{18}$, alors $z_p' = k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17}$. Comme z_p est une solution particulière de $z' - \frac{18}{x}z = -9$, alors $k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - \frac{18}{x}k(x)x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - 18k(x)x^{17} = -9 \Rightarrow$ $k(x)'x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)' = -9x^{-18} \Rightarrow k(x) = \frac{9}{17}x^{-17} \Rightarrow z_p = \frac{9}{17}x^{-17}x^{18} = \frac{9}{17}x$. alors la solution générale de l'équation différentielle linéaire est $z = kx^{18} + \frac{9}{17}x$, $k \in \mathbb{R}$. Comme $z = \frac{1}{y^3}$, alors $y^3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{kx^{18}+\frac{9}{17}x}$, $k \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{1}{(kx^{18}+\frac{9}{17}x)^{\frac{1}{3}}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$ .... $\boxed{31}$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{31}$ est $r^2 - 3r + 2 = 0$ .... $\boxed{31}'$.
   $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$. Donc L'équation $\boxed{31}'$. admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{31}$ est : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
2. $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$ .... $\boxed{32}$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{31}$ est $r^2 + 2r + 1 = 0$ .... $\boxed{32}'$.
   $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Donc L'équation $\boxed{31}'$. admet une racine réelle double $r = \frac{-2}{2} = -1$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{32}$ est : $y(x) = (A + Bx)e^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
3. $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 0}$ .... $\boxed{33}$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{33}$ est $r^2 - 2r + 2 = 0$ .... $\boxed{31}'$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$. Donc L'équation $\boxed{31}'$. admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{33}$ est : $y(x) = (A \sin x + B \cos x)e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

4. $y'' - 2\lambda y' + y = 0$ .... $\boxed{34}$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{34}$ est $r^2 - 2\lambda r + 1 = 0$ .... $\boxed{34}'$.
   $\Delta = 4\lambda^2 - 4$.
   • Si $\lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet deux racines réelles distinctes : $r_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $r_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = Ae^{(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})x} + Be^{(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

   • Si $\lambda \in \{-1, 1\}$, alors $\Delta = 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet une racine réelle double $r = \lambda$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = y(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

   • Si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation $\boxed{34}'$ admet deux racines racines complexes conjuguées $r_1 = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$ et $r_2 = \lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{34}$ est : $y(x) = \left(A \sin\left(\sqrt{1-\lambda^2}\, x\right) + B \cos\left(\sqrt{1-\lambda^2}\, x\right)\right) e^{\lambda x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. $y'' - y = x^2 + x + 1$ .... $\boxed{41}$.
   L'équation homogène associée à $\boxed{41}$ est : $y'' - y = 0$ .... $\boxed{41}'$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{41}'$ est : $r^2 - 1 = 0$ .... $\boxed{41}''$.
   $\boxed{41}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{41}'$ est : $y(x) = Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
   ▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{41}$:** Le second membre de l'équation $\boxed{41}$ est : $f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)e^{0x}$. Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{41}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{41}$ sous la forme : $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. En substituant dans l'équation $\boxed{41}$, on obtient : $2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$. Par identification, on obtient le système suivant : $-a = 1$, $-b = 1$, $2a - c = 1 \Rightarrow a = -1$, $b = -1$ et $c = -3$. Donc la solution particulière de $\boxed{41}$ est : $y_p(x) = -x^2 - x - 3$.
   ▷ **Solution générale de $\boxed{41}$:**
   $y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
2. $\boldsymbol{y'' - 2y' - 8y = e^x}$ **........................** $\boxed{42}$.
   L'équation homogène associée à $\boxed{42}$ est : $y'' - 2y' - 8y = 0$ .... $\boxed{42}'$.
   L'équation caractéristique de $\boxed{42}'$ est : $r^2 - 2r - 8 = 0$ .... $\boxed{42}''$.
   $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$. Donc $\boxed{42}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{42}'$ est : $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
   ▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{42}$:** Le second membre de l'équation $\boxed{42}$ est : $f(x) = e^x = e^{1x}$. Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{42}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{42}$ sous la forme : $y_p(x) = ae^x, \quad a \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = ae^x$ et $y_p''(x) = ae^x$. En substituant dans l'équation $\boxed{42}$, on obtient : $ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x$. Par identification, on obtient $-9a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{9}$. Donc la solution particulière de $\boxed{42}$ est : $y_p(x) = -\frac{1}{9}e^x$.
   ▷ **Solution générale de $\boxed{42}$:**

$y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -\frac{1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

3. $\boldsymbol{y'' - 2y' = \sin x}$ **.......................** $\boxed{43}$.

L'équation homogène associée à $\boxed{43}$ est : $y'' - 2y' = 0$ .... $\boxed{43}'$.

L'équation caractéristique de $\boxed{43}'$ est : $r^2 - 2r = 0$ .... $\boxed{43}''$.

$\boxed{43}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{43}'$ est : $y(x) = A + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

$\triangleright$ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{43}$:** Le second membre de l'équation $\boxed{43}$ est : $f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}$. Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{43}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{43}$ sous la forme : $y_p(x) = a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = a \cos x - b \sin x$ et $y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x$. En substituant dans l'équation $\boxed{43}$, on obtient : $(-a \sin x - b \cos x) - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x$. Par identification, on obtient $-a + 2b = 1$, $-b - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{2}{5}.$. Donc la solution particulière de $\boxed{43}$ est : $y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$.

$\triangleright$ **Solution générale de $\boxed{43}$:**

$y_g(x) = y(x) + y_p(x) = A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

4. $\boldsymbol{y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}}$**, avec $\boldsymbol{y(0) = 0}$ et $\boldsymbol{y'(0) = 0}$ ....** $\boxed{44}$.

L'équation homogène associée à $\boxed{44}$ est : $y'' - 4y' + 3y = 0$ .... $\boxed{44}'$.

L'équation caractéristique de $\boxed{44}'$ est : $r^2 - 4r + 3 = 0$ .... $\boxed{44}''$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Donc $\boxed{44}''$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de $\boxed{44}'$ est : $y(x) = Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

$\triangleright$ **Recherche d'une solution particulière y_p de $\boxed{44}$:** Le second membre de l'équation $\boxed{44}$ est : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$. Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\boxed{44}'$, alors on cherche une solution particulière de $\boxed{44}$ sous la forme : $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}, \quad a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$ et $y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}$. En substituant dans l'équation $\boxed{44}$, on obtient : $(ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$. Par identification, on obtient $8a = 2$, $-6a + 8b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{5}{16}.$. Donc la solution particulière de $\boxed{44}$ est : $y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}$.

$\triangleright$ **Solution générale de $\boxed{44}$:**

$y_g(x) = y_p(x) + y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$

$\triangleright$ **Application aux conditions initiales :**

On a : $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{16} + A + B = 0 \quad (1)$. De plus, la dérivée de $y_g(x)$ est : $y'(x) = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\right) e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}$. Donc $y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{16} + A + 3B = 0 \quad (2)$. En résolvant le système formé par (1) et (2), on obtient : $A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{16}$.

$\triangleright$ **Solution finale du problème de Cauchy :**

$y_g(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x}.$