*Université A. Mira*
*Dpt : ST 2ième année licence* *20/02/10*

*Examen du module de Maths 3*

***Exercice 1 (1,5 pts) :***

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \cdots$$

***Exercice 2(4 pts ) :***

Etudier la série de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ .

***Exercice 3 (6 pts ) :***

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x) = \frac{x}{n + x^2} \qquad n \geq 1 , \ x \in \mathrm{R}$$

***Exercice 4 (7 pts ) :***

Soit $U_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall \, (n, x) \in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur $R_+$ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur $R_+^*$
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur $R_+^*$ etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall \ x \ \in R_+^* \qquad u'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x < 0$

***Exercice 5 :*** ***(1,5 pts) :*** Au choix 1) ou 2)

*1)* Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0} (n^2 + 3n + 2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général $U_n$ = Arctang ( $\frac{1}{1+n+n^2}$ ) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ( $\frac{a-b}{1+ab}$ ) = Arctang (a) – Arctang (b)

Corrigé

Ex1 (1,5)

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \cdots$$

0,5

0,5 $= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $\frac{1}{2n(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV car c'est une série de Riemann $\alpha = 2 > 1$

0,5

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ CV

Ex2 (4,5) $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

0,5 0,5

$U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{-1}$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0,\ n \to +\infty$

$\Rightarrow U_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{\sin n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ 0,5

$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 0,5

* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV. car c'est une série alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$. 0,5

* $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ CA car $\left|\frac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin n$ CV

* $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV. 0,5

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

Ex3

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \qquad n \geq 1 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

* C.S

si $x = 0$ $f_n(x) = 0$ 0,5

si $x = 0$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ 0,5

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

0,5

C.U (4,5)

$f_n \xrightarrow{CU} f=0 \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; |f_n(x) - 0| < \varepsilon$

on étudie la fonction $f_n$

on remarque que $f_n$ est impaire on l'étudie donc sur $[0, +\infty[$

$f'_n(x) = \frac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{n - x^2}{(n+x^2)^2}$ 0,5

$f'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{n}$ 0,5

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(\sqrt{n})$ | $\searrow$ | $0$ |

1

$f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ ½

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$ 0,5

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$.

1pt

Ex4 (7pts)

1. a) CVN (a > 0)

$x \geq a \Rightarrow x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \Rightarrow -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\Rightarrow e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie CV

en effet : $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \exists M>0 \text{ tq } e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum e^{-a\sqrt{n}}$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ CVN sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

1b) CVN sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0$

$\Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ dV pour $x=0 \Rightarrow \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. soit $U = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$

$\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CVN sur $[a,+\infty[ \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CU sur $[a,+\infty[$

et les $U_n$ sont cont sur $[a,+\infty[$ $\Rightarrow U$ est cont sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

et comme la serie dV pour $x=0 \Rightarrow$

$U(x) = \sum U_n(x)$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Etudions la CU de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}})$ $x>0$

on a : $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow -\sum \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

ls : $U_n$ sont dériv sur $\mathbb{R}_+^*$

1 | $\cdot \sum U_n$ cv; U sur " $\Rightarrow \left(\sum U_n\right)' = \sum U_n'$

| $\cdot \sum U_n'$ cu " "

où $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$

4. si $x < 0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum U_n(x)$ dv

0,5

Ex 5 (1,5)

1) $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$

0,5 $\Rightarrow R_c = 1$

0,5 si $x = 1$ $\sum (n^2+3n+2)$ dv car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$

0,5 si $x = -1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ dv car $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$ (n'a pas de limite)

$\Rightarrow D_c = ]-1, 1[$.

2). $U_n = \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n^2+n} = \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n(n+1)} = \text{Arctg}\, n+1 - \text{Arctg}\, n$

0,5 on a : $a = n+1$ et $b = n$

0,5 $\text{Arctg}\, \frac{1}{1+n^2+n} \sim \text{Arctg}\, \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow \sum \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n+n^2}$ cv

calculons sa somme $S = \sum_{n\geq 0} \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n+n^2}$

$S = \lim_{n\to+\infty} \left(\text{Arctg}\, 1 - \text{Arctg}\, 0 + \cancel{\text{Arctg}\, 2} - \cancel{\text{Arctg}\, 1} + \dots + \text{Arctg}\, n+1\right)$

0,5 $= \lim_{n\to+\infty} \text{Arctg}\, n+1 = \frac{\pi}{2}$

* On peut prendre aussi $a = \frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{1+n^2+n}$